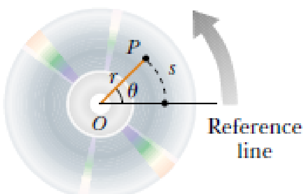
الفصل الرابع / الحركة الدورانية والحركة الدائرية

Rotational and Circular Motion

1-4/ الحركة الدورانية Rotational Motion

لوصف حركة جسم متحرك على خط مستقيم يلزم اختيار محور على طول هذا الخط المستقيم ، عادة يستخدم المحور x لهذا الغرض. ولوصف حركة جسم في مسار دائري (الحركة الدائرية) او دوران عجلة حول محور دوران (الحركة الدورانية) يكون من الضروري اختيار احداثي لقياس الزاوية، لنفرض جسماً صلداً rigid body مثل قرص CD يدور حول محور ثابت O عمودي على مستوي الشكل ، نأخذ نقطة (جسيم particle) P من القرص تبعد مسافة r عن المركز O كما في الشكل ، عند دوران القرص فأن الخط OP يصنع زاوية θ مع محور افتراضي مرجعي ، الزاوية θ تسمى بالإزاحة الزاوية او الموقع الزاوي angular position. هناك ثلاث طرق لقياس الزاوية : اذ يمكن قياس θ بالدرجات degrees ونحن نعلم بان الدورة الواحدة تكافئ 360° ، كذلك يمكن قياس الزاوية بعدد الدورات revolutions فالدائرة تكافئ دورة واحدة ، اي ان $360^{\circ} = 1rev$ ، الطريقة الثالثة هي القياس النصف قطري او الزاوية النصف قطرية radian (rad) وهي زاوية مركزية تقابل قوساً طوله يساوي نصف قطر الدائرة .عند دوران القرص فأن النقطة P سوف تتحرك على قوس دائرة طوله s يرتبط بالعلاقة الأتية مع θ



$$s = r\theta \;\rightarrow \theta = \frac{s}{r} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ولدورة كاملة،تقطع النقطة P محيط الدائرة circumference اي $(2\pi r)$ فتكون $\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi(rad)$

اذن $360^{\circ} = 2\pi(rad) = 1(rev)$

تحويل الدرجات والدورات الى النصف قطري

$$\theta(rad) = \frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}} 2\pi(rad) \quad ; \quad \theta(rad) = \frac{\theta(rev)}{1(rev)} 2\pi(rad)$$

تحويل النصف قطري والدورات الى درجات

$$\theta(\deg) = \frac{\theta(rad)}{2\pi(rad)} \times 360^{\circ} \quad ; \quad \theta(\deg) = \frac{\theta(rev)}{1(rev)} \times 360^{\circ}$$

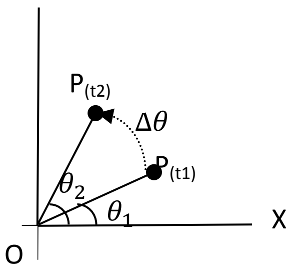
تحويل النصف قطري والدرجات الى دورات

$$\theta(\text{rev}) = \frac{\theta(rad)}{2\pi(rad)} 1(rev) \quad ; \quad \theta(rev) = \frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}} 1(rev)$$

على سبيل المثال $60^\circ = \frac{\pi}{3} rad$ و $45^\circ = \frac{\pi}{4} rad$

عند دوران الجسم سوف تتغير θ مع الزمن لنفترض عند اللحظة t_1 تكون الزاوية θ_1 وعند t_2 تكون θ_2 كما في الشكل . ان معدل السرعة الزاوية $(\overline{\omega})$ angular velocity هو معدل التغير الزمني للزاوية θ وعليه فان

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$



حيث ان ω هي المعدل الزمني لتغير الازاحة الزاوية $\Delta\theta$ angular displacement اما السرعة الزاوية الانية (اللحظية) فتعرف

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

وعندما تتغير السرعة الزاوية التي يتحرك بها الجسم فسوف يتحرك الجسم بتعجيل زاوي ، فاذا كانت ω_1 و ω_2 تمثلان السرعتين الزاويتين في اللحظتين t_1 و t_2 فان معدل التعجيل الزاوي $\overline{\propto}$ يعرف من العلاقة :

$$\overline{\propto} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

اما التعجيل الزاوي الاني فيعرف من العلاقة :

$$\propto = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

عندما تكون السرعة الزاوية ثابتة ، اي ان الجسيم يمر في اي نقطة من نقاط الدائرة بفترات زمنية منتظمة فتسمى هذه الحركة بالحركة الدورية periodic والزمن اللازم لدورة كاملة يسمى بالزمن الدوري T وان عدد الدورات خلال وحدة الزمن يسمى بالتردد frequency ويكون $(6) \cdots\cdots\cdots\cdots \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

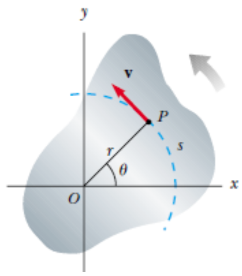
مثال1/ حول 70° الى مايقابلها 1- بالمقياس النصف قطري 2- بالدورات

$$1\text{-}\ \theta(rad) = \frac{70^\circ}{360^\circ} 2\pi(rad) = 1.22 rad \quad ; \quad 2\text{-}\ \theta(rev) = \frac{70^\circ}{360^\circ} 1 rev = 0.19 rev$$

س/ حول $100\pi rad$ الى مايكافئها من الدورات والدرجات .

2-4 العلاقة بين الكميات الزاوية والخطية relation between angular and linear quantities

من المعلوم ان كل نقطة (جسيمه) من نقاط الجسم الدائر تتحرك على دائرة مركزها محور الدوران ، ولكون النقطة P في الشكل المجاور تتحرك على دائرة فان متجه سرعتها الخطية يكون دائماً مماسا للمسار الدائري لذلك تسمى بالسرعة المماسية tangential velocity ويمكن ايجاد مقدار السرعة المماسية للنقطة P من تعريف الانطلاق المماسي $v = ds/dt$ حيث s تمثل المسافة التي تقطعها النقطة P على المسار الدائري وان $s = r\theta$



$$\therefore v = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow v = r\omega \cdots\cdots\cdots (7)$$

وان التعجيل المماسي يعرف $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \rightarrow a = r \propto \cdots\cdots\cdots (8)$

3-4 الحركة الدورانية بتعجيل زاوي ثابت

rotational motion with constant acceleration

كما درسنا الحركة الخطية بتعجيل ثابت سوف نتناول دراسة الحركة الدورانية بتعجيل زاوي ثابت ونجد العلاقات الحاكمة للحركة في هذه الحالة . من المعادلة 5 لدينا $d\omega = \propto dt$ وعند تكامل هذه العلاقة في الفترة $t_\circ = 0$ الى t سوف نحصل على

$$\omega = \omega_\circ + \propto t \cdots\cdots\cdots (9)$$

ومن المعادلة (5) وبعد تعويض ω من معادلة (9) نحصل:

$$\int_{\theta_\circ}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega_\circ\, dt + \int_0^t \propto t dt \rightarrow \theta = \theta_\circ + \omega_\circ t + \frac{1}{2} \propto t^2 \cdots\cdots\cdots (10)$$

فاذا بدأ الجسم بالدوران من نقطة الاصل عند $t_\circ = 0$ فان

$$\theta = \omega_\circ t + \frac{1}{2} \propto t^2 \cdots\cdots\cdots (11)$$

وعند تعويض الزمن من المعادلة (9) في (10) نحصل على

$$\theta = \theta_\circ + \omega_\circ \left(\frac{\omega - \omega_\circ}{\propto}\right) + \frac{1}{2} \propto \left(\frac{\omega - \omega_\circ}{\propto}\right)^2 \rightarrow \omega^2 = \omega_\circ{}^2 + 2 \propto (\theta - \theta_\circ) \cdots\cdots\cdots (12)$$

العلاقات اعلاه تمثل معادلات الحركة الدورانية بتعجيل زاوي ثابت وهي تقابل معادلات الحركة الخطية بتعجيل ثابت . الجدول ادناه يلخص هذه العلاقات.

الحركة الدورانية بتعجيل ثابت	الحركة الخطية بتعجيل ثابت
$\omega = \omega_\circ + \propto t$	$v = v_\circ + at$
$\theta = \theta_\circ + \omega_\circ t + \frac{1}{2} \propto t^2$	$y = y_\circ + v_\circ t + \frac{1}{2} at^2$
$\omega^2 = \omega_\circ{}^2 + 2 \propto (\theta - \theta_\circ)$	$v^2 = v_\circ^2 + 2a(x - x_\circ)$

مثال/ قرص CD بدأ الدوران في مشغل الاقراص وكان الانطلاق المماسي للقرص ثابت ويبلغ 1.3m/s عند عدسة المشغل جد :1- الانطلاق الزاوي بـ rev/min عند الحافة الداخلية للقرص (r=23mm) وعند الحافة الخارجية (r=58mm) . 2- اذا كان الزمن القياسي لتشغيل القرص 74min و 33s كم دوره يدورها القرص خلال هذه الفترة الزمنية . 3- ماهي المسافة المكافئة لحركة القرص خلال هذه الفترة الزمنية .

1- $v = r\omega \rightarrow \omega_1 = \frac{v}{r_1} = \frac{1.3}{23\times10^{-3}} = 57\, rad/s$

$$= \left(\frac{57\,\frac{rad}{s}}{2\pi\, rad}\right) 1\, rev \left(\frac{60\, s}{1\, min}\right) = 5.4 \times 10^2 rev/min$$

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{1.3}{58\times10^{-3}} = 22\,\frac{rad}{s} = 2.1 \times 10^2 rev/min$$

2- $t = 74\,\text{min}(60s/min) + 33s = 4473s$

$$\theta = \omega_\circ t + \frac{1}{2} \propto t^2 \quad ; \quad \propto = \frac{\omega - \omega_\circ}{t} = \frac{22-57}{4473} = -7.8 \times 10^{-3} rad/s^2$$

$$\therefore \theta = 57 * 4473 - \frac{1}{2} * 7.8 * 10^{-3} * (4473)^2 \cong 1.8 * 10^5 rad$$

$$\theta = \frac{1.8 * 10^5 rad}{2\pi\, rad} * 1rev \cong 28000 rev$$

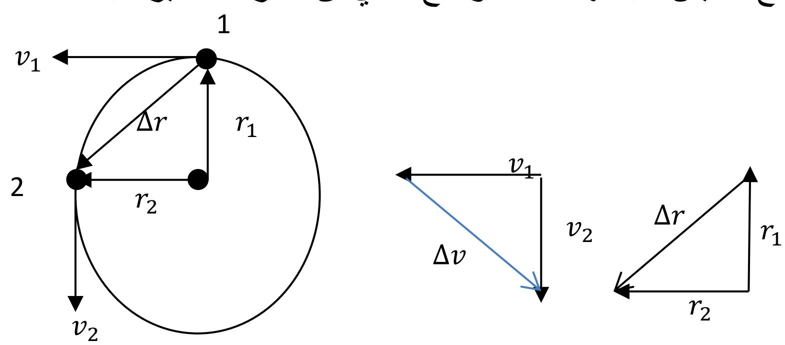
3- $x = vt = 1.3 * 4473 = 5800m$

4-4 الحركة الدائرية circular motion

هي حركة الجسم بأجمعه حول مسار دائري مثل حركة السيارة حول ساحة دائرية وحركة الارض حول الشمس وحركة الالكترون حول نواة الذرة .

ولدراسة حركة جسم في مسار دائري بسرعة ثابتة مثلا سيارة تسير على مسار دائري

بسرعة v ثابتة المقدار . بالرغم من تساوي مقدار سرعة السيارة في نقطتين محددتين 1 و 2 كما في الشكل وفي جميع النقاط الاخرى على المسار الا ان السيارة تعاني تعجيلا معيناً . ولفهم ذلك نتذكر حقيقتين :1- ان مقدار السرعة (الانطلاق) والسرعة ليسا نفس الشيء . 2- ان التعجيل هو المعدل الزمني لتغير السرعة وحيث ان اتجاه السرعة عند الموضع 1 ليس اتجاهها عند الموضع 2 اي ان السرعة تتغير اتجاها اثناء حركة السيارة في المسار الدائري



عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة حول دائرة ، يدور متجه الموضع r بسرعة زاوية ω ثابتة ويدور متجه السرعة ايضاً مع السرعة الزاوية الثابتة ويكون عمودياً على متجه الموضع اي ان $v \perp r$. تمثل متجهات الموضع والسرعة كما في الشكل اعلاه حيث ان v_2, v_1, r_2, r_1 تمثل متجهات الموضع والسرعة في اللحظتين t_1 و t_2 وان المثلثين اعلاه متشابهين ومنه نحصل

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad ; \quad r_1 = r_2 = r \, ; \quad v_1 = v_2 = v$$

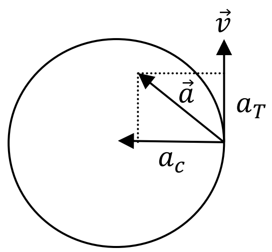
$$\frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

وبأخذ الغاية للطرفين عندما تقترب Δt من الصفر نحصل $\frac{v}{r} = \frac{a}{v}$

$$a = a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v \cdots\cdots\cdots (13)$$

هذا التعجيل يتجه نحو مركز الدائرة ويسمى بالتعجيل المركزي (a_c) centripetal acceleration وينتج عن تغير اتجاه السرعة . اما في حال تغير مقدار السرعة فينتج عن ذلك مركبة التعجيل المماسية (a_T) tangential acceleration والتي تعرف من العلاقة (12) . خلاصة القول ان تغير سرعة الجسيم الدائر سواء كان بالمقدار ام الاتجاه ام كليهما ينتج عنه تعجيل ذلك الجسيم ، والتعجيل كمية متجهه لها مركبتان مركبة مماسية a_T ومركبة عمودية تسمى المركبة المركزية للتعجيل او التعجيل المركزي وكما مبين في الشكل ادناه وتكون باتجاه مركز الدوران وان محصلة تعجيل الجسيم تصبح

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2}$$



مثال/ما زمن الدورة الواحدة لقمر اصطناعي يسير في مدار دائري على ارتفاع 10^5m من سطح الارض عندما يساوي تعجيل جذب الارض $9.5\,\frac{m}{s^2}$ ؟ علما ان نصف قطر الارض يبلغ $6.4 \times 10^6 m$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \;;\; a_c = g = \omega^2 r \;\rightarrow\; \omega = \sqrt{g/r} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{r/g}$$

$$r = (6.4 \times 10^6 + 10^5)m = 6.5 \times 10^6 m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6.5\times10^6}{9.5}} = 5196s = 1.44h$$

مثال/ قرص نصف قطره 10cm بدأ الحركة من السكون ويعجل حول محوره الافقي بتعجيل زاوي ثابت مقداره $2rad/s^2$.النقطة P على حافة القرص تقع عمودياً فوق المركز عند البداية . جد ما يأتي عند نهاية الثانية الاولى من الحركة :1- موقع النقطة P . 2- محصلة التعجيل .

1- $\theta = \omega_\circ t + \frac{1}{2} \propto t^2 = 0 + \frac{1}{2} * 2 * 1 = 1rad$

2- $\omega^2 = \omega_\circ{}^2 + 2\theta \propto = 0 + 2 * 2 * 1 = 4(rad/s)^2$

$a_c = r\omega^2 = 10 * 4 = 40\ cm/s^2$

$a_T = r \propto = 10 * 2 = 20cm/s^2$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44.7cm/s^2$$

$$\tan \emptyset = \frac{a_T}{a_c} = \frac{20}{40} \rightarrow \emptyset = 26.56^{\circ}$$

مثال/ جسيم يدور حول محيط دائرة افقية نصف قطرها 8cm وازاحته الزاوية في اي لحظة من زمن الحركة هي $\theta = t^3 - 3t^2 - 9t + 12$ مقدرة بـ rad جد : 1- السرعة الزاوية والتعجيل الزاوي كدوال للزمن . 2- متى تكون محصلة تعجيل الجسيم متجهه نحو مركز الدائرة ، وما قيمة هذا التعجيل . 3- متى تكون محصلة التعجيل مماسة للمسار الدائري وما قيمة هذا التعجيل ؟

1- $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 3t^2 - 6t - 9\frac{rad}{s}$; $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 6t - 6\ rad/s^2$

2- لكي تكون محصلة التعجيل متجهه نحو مركز الدائرة يجب ان يكون التعجيل المماسي مساوياً للصفر اي ان $a_t = r \propto = 0$

$$6t - 6 = 0 \rightarrow t = 1s\ ; a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = a_c = \omega^2 r$$

$$\omega = 3 - 6 - 9 = -12\frac{rad}{s} \rightarrow a = (-12)^2 * 8 = 1152\ cm/s^2$$

3- لكي تكون محصلة التعجيل مماسة للمسار الدائري يجب ان يكون التعجيل المركزي صفراً

$$a_c = r\omega^2 = 0\ , r \neq 0 \ \rightarrow \omega = 0$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 0 \rightarrow 3(t+1)(t-3) = 0 \rightarrow t = 3s$$

$$\propto = 18 - 6 = 12\frac{rad}{s^2} \rightarrow a_T = \propto r = 12 * 8 = 96\ cm/s^2$$

س/جسم ساكن عجل بمسار دائري نصف قطره $1.3m$ حسب المعادلة $\propto = 120t^2 - 48t + 16$ جد الموقع الزوي والسرعة الزاوية كدوال للزمن .ثم جد مركبتي التعجيل المركزي والمماسي؟