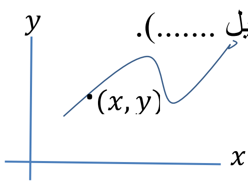
الفصل الثاني / المتجهات Vectors

تصنف الكميات الفيزيائية الى صنفين هما كميات عددية Scalar وكميات اتجاهية Vector . الكميات العددية هي كميات تعيّن تعييناً كاملا بمعرفة مقدارها فقط حيث يمثل هذا المقدار عدداً موجبا او سالبا قد تليه وحدة قياس مناسبة ، وهي تخضع للعمليات الجبرية المألوفة (الجمع والطرح ...) . من الامثلة الشائعة على هذه الكميات (الزمن ، الكتلة ، درجة الحرارة .....).

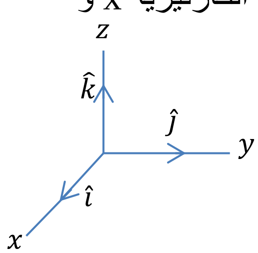
أما الكميات الفيزيائية التي يلزم تعيينها بصورة كاملة معرفة كل من مقدارها واتجاهها فهي الكميات الاتجاهية وهي لاتخضع لقواعد الجبر البسيطة بل تخضع لجبر المتجهات . من امثلتها (القوة ، الازاحة ، التعجيل ....).



ولتوضيح مفهوم المتجه نفترض جسـماً يتحرك في المستوي xy كما مبين في الشكل المـــجاور لوصف موقع الجسم في لحظة معينة نختار نقطة ما على منحن الحركة فتكون هذه النقطة عبارة عن زوج من النقاط (x, y) فيكون لدينا نقطتان بدلا من نقطة واحدة وللسهولة تجمع هاتان النقطتان بكمية نسميها المتجه . يمثل المتجه بيانياً بسهم طوله يمثل مقدار ذلك المتجه اما اتجاهه فهو زاوية انحراف ذلك المتجه. يمثل المتجه عادة بحرف فوقه سهم مثل $\vec{A}$ وان مقدار هذا المتجه يمثل بحرف بدون سهم او بالقيمة المطلقة للمتجه $|\vec{A}|$.

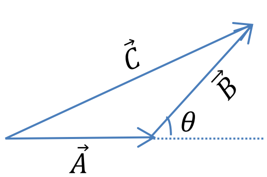
1-2 وحدة المتجه unit vector

هي متجه مقداره وحدة واحدة ، فالمتجه $\vec{A}$ يمكن تمثيله بوحدة متجه $\hat{a}$ بنفس اتجاه $\vec{A}$ مضروبه بنفس مقدار المتجه $\vec{A}$ ، اي ان $\vec{A} = \hat{a}A \rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$ لذلك فوحدة المتجه تمثل النسبة بين المتجه ومقداره ، وقد اتفق بأن $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$ هي ثلاث متجهات متعامدة في نظام الاحداثيات الكارتيزيه x و y و z مقدار كل منها وحدة واحدة . ويمكن وصف اي متجه كامتدادات لمتجهات الوحدة .



2-2 جمع وطرح المتجهات Addition and Subtraction of Vectors

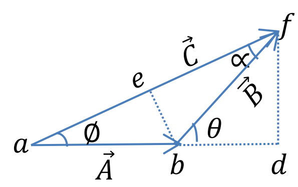
لنفرض جسما تحرك من مركز الاحداثيات وقطع ازاحة $\vec{A}$ باتجاه اليمين ثم قع ازاحة $\vec{B}$ بزاوية θ مع اتجاهه الاصلي فتكون اجمالي حركة الجسم (المحصلة Resultant) هي الازاحة التي قطعها الجسم من نقطة الاصل الى نهاية المتجه $\vec{B}$ ولنسميها بالمتجه $\vec{C}$. من هنا يتضح ان محصلة المتجهين تمثل حاصل جمعهما اي ان $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



و ترسم من بداية المتجه الاول الى نهاية المتجه الثاني وبنفس الطريقة يمكن جمع اكثر من متجهين .

يخضع جمع المتجهات لقانوني التبادل $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ والتجميع $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

ولحساب مقدار المحصلة $\vec{C}$ واتجاهها فيكون بطريقتين هما الطريقة الحسابية وطريقة تحليل المتجهات resolution of vectors . ولإيجاد مقدار محصلة متجهين بالطريقة الاولى نستخدم قانون الجيب تمام كما يلي : من الشكل ادناه نلاحظ ان



$$(af)^2 = (ad)^2 + (df)^2$$

$$ad = ab + bd = A + B\cos\theta$$

$$df = B\sin\theta \rightarrow$$

$$C^2 = \left(\vec{A} + B\cos\theta\right)^2 + (B\sin\theta)^2$$

$$\therefore\ C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

قانون الجيب تمام

اما اتجاه المحصلة فيمثل الزاوية التي يصنعها متجه المحصلة مع محور x الموجب اي الزاوية ∅ ، من المثلث في الشكل اعلاه نلاحظ ان:

$$\sin\emptyset = \frac{fd}{af} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{fd}{bf} \rightarrow \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\emptyset}$$

$$\sin\emptyset = \frac{be}{\mathrm{ab}} \quad ; \quad \sin\propto = \frac{be}{bf} \rightarrow \frac{B}{\sin\emptyset} = \frac{A}{\sin\propto}$$

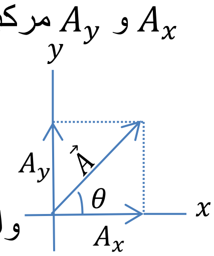
$$\therefore \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\emptyset} = \frac{A}{\sin\propto}$$

قانون الجيب

اما في تحليل المتجهات نحتاج اتجاهين متعامدين لجمع او تركيب اي عدد منها . كما اشرنا سابقا بانه يمكن وصف اي متجه كامتدادات لمتجهات الوحدة . لنفترض ان المتجه $\vec{A}$ في المستوي xy اذ يمكن تمثيله بدلالة متجهات الوحدة $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ فالمتجه الموازي لـ $\hat{\imath}$ واضح انه عدد ما مضروب بـ $\hat{\imath}$ او امتداد $\hat{\imath}$ لنسمي هذا العدد A_x وان A_y هي امتداد $\vec{A}$ على $\hat{\jmath}$ فيكون المتجه $\vec{A}$ هو حاصل الجمع $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y$

A_x و A_y مركبات components المتجه $\vec{A}$ على المحاور x و y . ان مقدار المتجه $\vec{A}$ يعرف بالعلاقة

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$ اما اتجاهه فيحسب من $$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$



والعلاقة بين مقدار المتجه ومركباته $A_x = A\cos\theta$; $A_y = A\sin\theta$

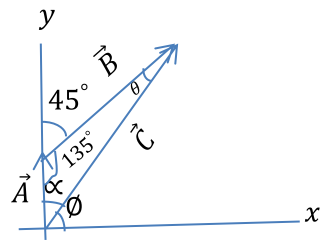
لجمع اي عدد من المتجهات تقع جميعها في مستوي واحد تنقل المتجهات بحيث تقع بدايتها في نقطة الاصل ثم يحلل كل متجه الى مركبتين .

اما طرح المتجهات فيخضع لنفس قواعد جمعها وهو يمثل عملية جمع سالب فمثلا المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يكون حاصل طرحهما بالصيغة $\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{A}-\vec{B}$ حيث $-\vec{B}$ هو متجه له نفس مقدار $\vec{B}$ ولكن بعكس اتجاهه .

هناك متجها خاصا يسمى بمتجه الموقع ويكتب الصيغة الأتية $\vec{r}=\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y+\hat{k}z$

ومقداره $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مثال1/ تتحرك سيارة 3Km باتجاه الشمال ثم 5Km في اتجاه شمال الشرق بزاوية 135° جد محصلة الازاحة واتجاهها



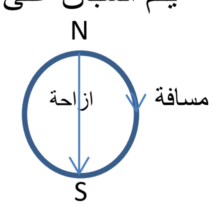
$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos 45}=\sqrt{9+25+30\cos 45}=7.43\ Km$$

$$\frac{C}{\sin 135}=\frac{B}{\sin\alpha}\rightarrow \sin\alpha=\frac{5}{7.43}\sin 135\ \rightarrow\ \alpha=28.4^\circ$$

$$\emptyset=90-28.4=61.6^\circ$$ باتجاه شمال الشرق

مثال 2/ يجرى سباق 100m على مسار دائري محيطه 200m ينطلق المتسابقون اولا نحو الشرق ثم ينعطفون نحو الجنوب . ماهي ازاحة نقطة النهاية بالنسبة لنقطة البداية؟

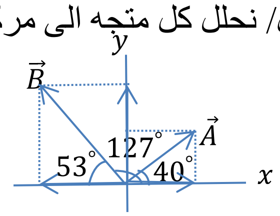
يتم السباق على نصف المسار فتكون الازاحة مساوية لقطر المسار الدائري



$\mathcal{S}=\pi R\rightarrow R=\frac{200}{\pi}=63.7m$ باتجاه الجنوب ; $\mathcal{S}$ المحيط; R القطر

مثال3/ جد محصلة الازاحتين التاليتين 2m بزاوية 40° و 4m بزاوية 127° . الزوايا باتجاه محور x الموجب .

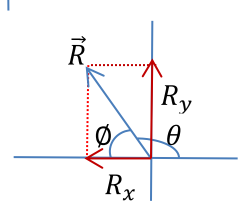
الحل/ نحلل كل متجه الى مركبتين متعامدتين في نظام المحاور x , y كما في الشكل فيكون



$$A_x=A\cos 40=2\cos 40=1.53m$$

$$A_y=A\sin 40=2\sin 40=1.285m$$

$$B_x=B\cos 127=4\cos 127=-2.4m\ ;\ B_y=B\sin 127=4\sin 127=3.2m$$



$$R_x=1.53-2.4=-0.87m\ ;\ R_y=1.29+3.2=4.49m$$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \rightarrow R = 4.57m$

$\tan \emptyset = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4.49}{0.87} = 5.1609 \rightarrow \emptyset = 79^\circ \rightarrow \theta = 180 - 79 = 101^\circ$

مثال4/ اذا كان

$$\vec{A}_1 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}\ ; \vec{A}_2 = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}; \vec{A}_3 = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}; \vec{A}_4 = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

جد المقادير العددية n_1, n_2, n_3 حيث ان $\vec{A}_4 = n_1\vec{A}_1 + n_2\vec{A}_2 + n_3\vec{A}_3$

$3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k} = n_1(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}) + n_2(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}) + n_3(-2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k})$

$2n_1 + n_2 - 2n_3 = 3 \cdots\cdots (1)$

$-n_1 + 3n_2 + n_3 = 2 \cdots\cdots (2)$

$n_1 - 2n_2 - 3n_3 = 5 \cdots\cdots (3)$

$\therefore\ n_1 = -2\ ;\ n_2 = 1\ ;\ n_3 = -3$

H.W /1– ثلاث متجهات تعطى بالمعادلات $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}\ ;\ \vec{B} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}\ ;\ \vec{C} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$

جد 1- محصلة المتجهات؟ 2- مقدار المحصلة؟ 3- $|3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C}|$

2- اذا اعطي المتجهان $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}\ ;\ \vec{B} = -3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ جد المتجه $\vec{C}$ عندما يكون $2\vec{A} + 7\vec{B} + 4\vec{C} = \vec{0}$ ؟

3- حل مثال/1 بطريقة تحليل المتجهات .

4- حل مثال/3 بالطريقة الحسابية .

2-3 ضرب المتجهات vectors multiplication

عند ضرب المتجه بكمية عددية ينتج متجه مقداره مساوٍ لحاصل ضرب مقدار المتجه بمقدار الكمية العددية واتجاهه يعتمد على اشارة الكمية العددية موجبة او سالبة ، فاذا كانت موجبة فاتجاهه نفس اتجاه المتجه واذا كانت سالبة فاتجاهه عكس اتجاه المتجه.

من المعلوم ان حاصل جمع متجهين يكون كمية متجهة لكن الامر يختلف عندما يتعلق الامر بضرب متجهين ، هنالك نوعان لضرب المتجهات هما :

- الضرب العددي scalar product : يعطى حاصل الضرب العددي بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالعدد الناتج من حاصل ضرب مقداري المتجهين في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما وهو كمية عددية

ويرمز له $(\vec{A}\cdot\vec{B})$ حيث $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ اذا كانت $(\theta = 0)$ فان $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$ لذلك فان مربع مقدار المتجه ينتج من ضرب المتجه في نفسه $\vec{A}.\vec{A} = A^2$ اما اذا كانت$(\theta = 90^\circ)$ فان $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ وهذا يمثل شرط تعامد متجهين . يخضع الضرب العددي لمجموعة من القوانين منها :

1- قانون التبادل $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

2- قانون التوزيع $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

3- اذا كانت m كمية عددية فان $m(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \left(m\vec{A}\right)\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\left(m\vec{B}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)m$

4- لمتجهات الوحدة يكون $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$; $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$

5- اذا كان $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$ فان

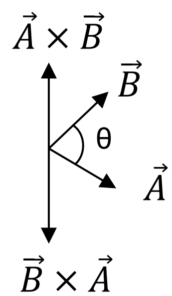
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad ; \quad \vec{A}\cdot\vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$$

H.W-اثبت قانون الجيب تمام باستخدام خصائص الضرب العددي ؟

- الضرب ألاتجاهي vector product : ان حاصل الضرب الاتجاهي بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يرمز له $(\vec{A}\times\vec{B})$ هو كمية متجهة يعرف مقدارها بحاصل ضرب مقداري المتجهين وجيب الزاوية المحصورة بينهما ، اما اتجاهه فيكون عمودياً على المستوي الذي يحوي المتجهين ، ويخضع لقاعدة الكف اليمنى ، حيث يكون اتجاه الكمية $\vec{A}\times\vec{B}$ باتجاه الابهام عند دوران بقية الاصابع من المتجه $\vec{A}$ الى المتجه $\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (AB\sin\theta)\hat{y}$$

حيث $\hat{y}$ هي وحدة المتجه التي تبين اتجاه الضرب .



عند $(\theta = 0)$ فان $\vec{A}\times\vec{B} = 0$ اي ان المتجهين متوازيان

هناك بعض القوانين التي يخضع لها الضرب الاتجاهي منها :

1. عدم صحة قانون التبادل $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$
2. قانون التوزيع $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$
3. اذا كانت m كمية عددية فأن

$$m(\vec{A}\times\vec{B}) = (m\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(m\vec{B}) = (\vec{A}\times\vec{B})m$$

4. لمتجهات الوحدة يكون $\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$; $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = -\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = \hat{k}$; $\hat{\jmath}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{\jmath} = \hat{\imath}$
$\hat{k}\times\hat{\imath} = -\hat{\imath}\times\hat{k} = \hat{\jmath}$

5. اذا كان $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$ فأن حاصل الضرب يمثل بالمحددة

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

6- مقدار الضرب ألاتجاهي يساوي مساحة متوازي الأضلاع المتكون من المتجهين او يساوي ضعف مساحة المثلث المتكون من المتجهين ومحصلتهما واتجاهه عمودي على مستوي متوازي الأضلاع .

مثال5/ اذا كان $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ جد :1-الزاويه بين المتجهين
2- $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

1- $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = (2)(1) + (4)(-3) + (-2)(-1) = -8$$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} = 3.74$$

$$B = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21} = 4.58 \rightarrow \cos\theta = \frac{-8}{(3.74)(4.58)} \rightarrow \theta = 117.8^\circ$$

2- $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$; $\vec{A} - \vec{B} = \hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k}$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = [(1)(1) - (-3)(-7)]\hat{\imath} - [(3)(1) - (-3)(1)]\hat{\jmath} + [(3)(-7) - (1)(1)]\hat{k} = -20\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

مثال6/ متوازي اضلاع ضلعاه المتجهان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ جد 1- مساحته
2- وحدة المتجه العمودية على مستوي متوازي الاضلاع .

1- $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}\ (\text{unit})^2$$

2- $\hat{n} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{35}}\hat{\imath} - \frac{5}{\sqrt{35}}\hat{\jmath} - \frac{3}{\sqrt{35}}\hat{k}$

مثال7/ جد وحدة المتجه الموازية لمحصلة المتجهين $\vec{S}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ و $\vec{S}_2 = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

$$\vec{R} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}\ ;\ R = \sqrt{9+36+4} = 7$$

$\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{3}{7}\hat{\imath} + \frac{6}{7}\hat{\jmath} - \frac{2}{7}\hat{k}$ تحقق من صحة النتيجة

2-3 تفاضل المتجه differential of a vector

لنفرض ان مركبات المتجه $\vec{R}$ هي دوال لمتغير واحد وليكن u $\vec{R}(u)=\hat{\imath}R_x+\hat{\jmath}R_y+\hat{k}R_z$ فان $\frac{d\vec{R}}{du}=\hat{\imath}\frac{dR_x}{du}+\hat{\jmath}\frac{dR_y}{du}+\hat{k}\frac{dR_z}{du}$ اي ان مشتقة المتجه هي متجه مركباته مشتقات مركبات المتجه . من بعض خصائص اشتقاق المتجه

$\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\vec{B}}{du}$ اي ان مشتقة مجموع متجهين تساوي مجموع مشتقات كل منهما

$$\frac{d(m\vec{A})}{du}=\frac{dm}{du}\vec{A}+m\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du}=\frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}\ ;\ \frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du}=\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$$

مثال8/ اذا كان المتجهان $\vec{U}=2t\hat{\imath}+t^2\hat{k}$ و $\vec{V}=\cos 5t\,\hat{\imath}+\sin 5t\,\hat{\jmath}-10\hat{k}$ فعند $t=2$ جد مقدار كل من $\frac{d\vec{U}}{dt};\frac{d\vec{V}}{dt};\ \frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V});\ \frac{d}{dt}(\vec{U}\times\vec{V})\ ;\frac{d^2}{dt^2}(\vec{U}\cdot\vec{V})$

$\frac{d\vec{U}}{dt}=2\hat{\imath}+2t\hat{k}$ at t=2 $\frac{d\vec{U}}{dt}=2\hat{\imath}+4\hat{k}$

$\frac{d\vec{V}}{dt}=-5\sin 5t\,\hat{\imath}+5\cos 5t\,\hat{\jmath}$ at t=2 $\frac{d\vec{V}}{dt}=-0.86\hat{\imath}+4.9\hat{\jmath}$

$\vec{U}\cdot\vec{V}=2t\cos 5t-10t^2\rightarrow\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V})=2t(-5\sin 5t)+2\cos 5t-20t$ at t=2

$\rightarrow\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V})=-20\sin 10+2\cos 10-40=-41.5$

$$\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2t & 0 & t^2\\ \cos 5t & \sin 5t & -10\end{vmatrix}=-t^2\sin 5t\,\hat{\imath}+(20t+t^2\cos 5t)\hat{\jmath}+2t\sin 5t\,\hat{k}$$

$\frac{d}{dt}(\vec{U}\times\vec{V})=[-t^2(5\cos 5t)+\sin 5t\,(-2t)]\hat{\imath}+[(20+t^2(-5\sin 5t+2t\cos 5t]\hat{\jmath}+[2t(5\cos 5t+2\sin 5t)]\hat{k}$ at t=2 $\rightarrow$

$\frac{d}{dt}(\vec{U}\times\vec{V})=-20.39\hat{\imath}+20.46\hat{\jmath}+20.04\hat{k}$

$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{U}\cdot\vec{V})=-10t(5\cos 5t)+\sin 5t\,(-10)-10\sin 5t-20$ *at t=2*$\rightarrow$

$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{U}\cdot\vec{V})=-100\cos 10-10\sin 10-10\sin 10-20=-121.95$

مثال9/ متجهان $\vec{D}_1 = x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + 2t\hat{k}$ و $\vec{D}_2 = (x^2 - z^2)\hat{\imath} - y^2\hat{\jmath}$ جد مايلي عند النقطه (0,2,2) و t=2

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 \;;\; \vec{D}_1 \times \vec{D}_2;\; \left|(\vec{D}_1 \times \vec{D}_2) \times \vec{D}_2\right| \;;\; \vec{D}_1 \cdot (\vec{D}_1 \times \vec{D}_2)$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = x^3 - xz^2 + y^3 = 8$$

$$\vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & -y & 2t \\ (x^2 - z^2) & (-y^2) & 0 \end{vmatrix} = 16\hat{\imath} - 16\hat{\jmath} - 8\hat{k}$$

$$(\vec{D}_1 \times \vec{D}_2) \times \vec{D}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 16 & -16 & -8 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -32\hat{\imath} + 32\hat{\jmath} - 128\hat{k}$$

$$\vec{D}_1 \cdot (\vec{D}_1 \times \vec{D}_2) = (-2\hat{\jmath} + 4\hat{k}) \cdot (16\hat{\imath} - 16\hat{\jmath} - 8\hat{k}) = 32 - 32 = 0$$

3-3 العامل التفاضلي للمتجه (دل) The Del Operator

العامل التفاضلي للمتجه يسمى دل او نبلا $\vec{\nabla}$ وهو متجه له نفس خصائص المتجهات ويعرف بالعلاقة $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ عمليات الضرب السابقة تنطبق على $\vec{\nabla}$ ولكن بتسميات معروفة وهي :

1- الانحدار (التدرج) Gradient : ويمثل ضرب المعامل $\vec{\nabla}$ بكمية عددية مثل $\emptyset$ ويسمى انحدار الكمية العددية يرمز له $\vec{\nabla}\emptyset$ او $\text{grad}\emptyset$ حيث ان $\vec{\nabla}\emptyset = \hat{\imath}\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\emptyset}{\partial z}$

2- التباعد Divergence: يمثل الضرب العددي بين اي متجه مثل $\vec{A}$ والعامل دل ويرمز له $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ او $\text{div}\vec{A}$ ويعرف $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ان حاصل الضرب العددي بين المعامل دل ونفسه هو $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ ويسمى معامل لابلاس Laplace ويعرف بالعلاقة

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3- الالتفاف (الدوران) Curl : الضرب الاتجاهي بين اي متجه مثل $\vec{A}$ والعامل دل يمثل التفاف ذلك المتجه ويرمز له $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ او $\text{curl}\vec{A}$ ويعرف بالعلاقة

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

ويمكن معرفة فيما اذا كانت القوة $\vec{F}$ محافظة ام لا من نتيجة هذا الضرب فاذا كانت $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ فالقوة محافظة .

بعض خصائص العامل دل . لنفرض ان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهان وان $\emptyset$ و φ دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق فان:

1. $\vec{\nabla}(\emptyset + \varphi) = \vec{\nabla}\emptyset + \vec{\nabla}\varphi$
2. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$
3. $\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$
4. $\vec{\nabla} \cdot (\emptyset\vec{A}) = (\vec{\nabla}\emptyset).\vec{A} + \emptyset(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$
5. $\vec{\nabla} \times (\emptyset\vec{A}) = (\vec{\nabla}\emptyset) \times \vec{A} + \emptyset(\vec{\nabla} \times \vec{A})$
6. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$
7. $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$
8. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\emptyset) = 0$
9. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
10. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2\vec{B}$

مثال10/ اذا كان $\vec{A} = (3x^2y - z)\hat{\imath} + (xz^3 + y^4)\hat{\jmath} - 2x^3z^2\hat{k}$ جد عند النقطة (1,-1,1) :
1-انحدار تباعد المتجه ؟ 2- التفاف المتجه؟

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 6xy + 4y^3 - 4x^3z$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) = (6y - 12x^2z)\hat{\imath} + (6x + 12y^2)\hat{\jmath} - 4x^3\hat{k} = -18\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (3x^2y - z) & (xz^3 + y^4) & (-2x^3z^2) \end{vmatrix} = (0 - 3xz^2)\hat{\imath} - [-6x^2z^2 - (-1)]\hat{\jmath} + (z^3 - 3x^2)\hat{k}$$

$$= (-3xz^2)\hat{\imath} - (1 - 6x^2z^2)\hat{\jmath} + +(z^3 - 3x^2)\hat{k} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$