Uniquely determined analytic functions وحدانية التحديد للدوال التحليلية

Analytic continuation والإمتداد التحليلي

الكلام هنا عن كيفية تأثر قيم الدالة التحليلية على نطاق D بقيمها على نطاق جزئي من D أو بقيمها على قطعة مستقيمة في D.

Lemma. Suppose that

1. f is analytic in a domain D;
2. $f(z)=0$ for each $z \in D_1$ (domain) $\subseteq D$
   or $z \in L$ (Line segment) $\subset D$.

Then $f(z)=0 \ \forall z \in D$.

بمعنى إذا كانت الدالة التحليلية على نطاق D تساوي صفراً على مجال جزئي D_1 من D أو على قطعة مستقيمة L في D فإنها تساوي صفراً على كل D.

Theorem. Suppose that (وحدانية التحديد)

1. f, g analytic in a domain D;
2. $f(z)=g(z)$ for each $z \in D_1$ (domain) $\subseteq D$,
   or $z \in L$ (line segment) $\subset D$.

Then $f(z)=g(z) \ \forall z \in D$.

(ie A function that is analytic in a domain D is uniquely determined over D by its values in a domain, or along a line segment, contained in D.

Proof. Let $h(z)=f(z)-g(z)$ is also analytic in D,

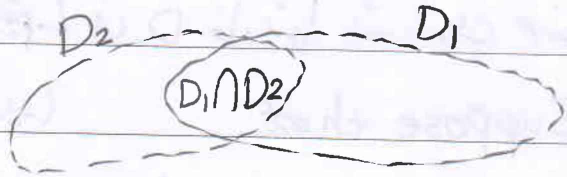
$h(z)=0 \ \forall z \in D_1 \subseteq D$ or $z \in L \subset D$,

then $h(z)=0 \ \forall z \in D$ [by lemma].

Thus $f(z)=g(z) \ \forall z \in D$.

لذلك فالدالة التحليلية على نطاق D قيمها على D تعرف بشكل وحيد حسب قيمها على نطاق جزئي D_1 من D أو قيمها على قطعة مستقيم L في D . فلا يمكن أن تتساوى دالتين تحليليتين على نطاق D تتساويان في نطاق جزئي من D أو في قطعة مستقيم في D وتختلفان في القيم بأي نقطة في D . ويمكن الاستفادة من النظرية (وحدانية التحديد) في توسيع نطاق الدالة التحليلية . فإذا كان لدينا نطاقين D_1 و D_2 بحيث f_1 تحليلية على D_1 و f_2 تحليلية على D_2 و أن $f_1(z)=f_2(z)$ for each $z\in D_1\cap D_2$ فالدالة f_2 إمتداد تحليلي لـ f_1 على النطاق D_2 . f_2 an analytic continuation of f_1 into D_2

إذا وجد الإمتداد التحليلي فهو وحيد (unique) بحسب نظرية وحدانية التحديد.



فيمكن تعريف دالة موسعة تحليلية

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases}$$

analytic على $D_1\cup D_2$.

ملاحظة: إذا كانت f تحليلية على D (نطاق) و f دالة ثابتة على النطاق D_1 الجزئي من D أو على قطعة مستقيم L في D فإنها ستكون ثابتة على كل D . (بحسب نظرية وحدانية التحديد) بمعنى أن f التحليلية على نطاق D وليست ثابتة فلن تكون ثابتة على أي جوار (بشكل عام نطاق) داخل D ، ولا على أي قطعة مستقيم في D .

(Page 85 8^{th} ed.) Reflection Principle مَبدأ الإنعكاس

إنّ بعض الدوال التحليلية (Analytic) تحقق $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

مثل z^2 ، $z+1$ ، بينما الدالة iz^2 و $z+i$ لا تحقق ذلك.

النظرية التالية ، تسمّى بمبدأ الإنعكاس (قاعدة الإنعكاس) ، توضح ذلك.

Theorem. Suppose that

1. f analytic in a domain D;
2. L (Segment of the x axis) $\subset D$;
3. $z \in D$ iff $\overline{z} \in D$. Then

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) \ \forall z \in D \text{ iff } f(x) \in \mathbb{R} \ \forall (x,0) \in L.$$

Proof. ($\Longleftarrow$) Let $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$, نريد ان نثبتها تحليلية على D

وهي فكرة الاثبات ثم نساويها بـ f على L وحسب نظرية وحدانية التحديد تتساويان على D.

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad F(x+iy) = r(x,y) + is(x,y)$$

$$F(x+iy) = u(x,-y) - iv(x,-y) = u(x,t) - iv(x,t),$$

where $t = -y$,

$\therefore \ r(x,y) = u(x,t)$ and $s(x,y) = -v(x,t)$

$$r_x = u_x, \qquad s_x = -v_x,$$

$$r_y = u_t \frac{dt}{dy} = -u_t, \qquad s_y = -v_t \frac{dt}{dy} = v_t.$$

Now $u_x = v_t$ and $u_t = -v_x$. [$f(x+it)$ is analytic (C-R)]

$\therefore \ r_x = s_y$ and $r_y = -s_x$, So r and s satisfy C-R eq. and r_x, r_y, s_x, s_y are continuous in D, then F analytic in D.

For each $(x,0) \in L$, $F(x) = r(x,0) + is(x,0) = u(x,0) - iv(x,0)$

$$= u(x,0) \quad [f(x) \in \mathbb{R}]$$

$$= f(x)$$

$\therefore\ F(z)=f(z)\ \ \forall z\in D$ [by thm.] تتساويان على القطعة L

Thus $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ i.e. $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$. فتتساويان على المنطلق. (وحدانية التمديد)

$(\Longrightarrow)\ u(x,y)+iv(x,y)=u(x,-y)-iv(x,-y)\ \ \forall x+iy\in D$

when $(x,0)\in L\subset D$, $u(x,0)+iv(x,0)=u(x,0)-iv(x,0)$

$\therefore\ v(x,0)=0$. Hence $f(x)\in\mathbb{R}$ for each $(x,0)\in L$. ■

ملاحظة: المعطى رقم (3) يعني أنَّ النصف السفلي من D هو إنعكاس للنصف العلوي من D بالنسبة إلى المحور x. واستُخدِم في الإثبات عندما الدالة f مُعرّفة على $\bar{z}$ لكل z في D $(f(\bar{z}))$

Examples. ① $f(z)=z+1$, Since $f(x)=x+1\in\mathbb{R}\ \ \forall x\in\mathbb{R}=L$

then by theorem of R. P. $\overline{f(z)}=f(\bar{z})\ \forall z\in\mathbb{C}=D$

ويُمكن التحقق من ذلك بشكل مباشر $\left(\overline{f(z)}=\overline{z+1}=\bar{z}+1=f(\bar{z})\right)$

② $f(z)=z^2$, $f(x)=x^2\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}$, so $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$.

③ But $f(z)=z+i$, dose not has the reflection property throughout the plane, because $x+i\notin\mathbb{R}$ for $x\in\mathbb{R}$.

④ $f(z)=iz^2$, has not the R. P. because $f(x)=ix^2\notin\mathbb{R}$ for $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

ملاحظة يوجد خطأ في ترجمة النظرية (قاعدة الإنعكاس) في ص346 كتاب المتغيرات المعقدة وتطبيقاتها ط3 يحيى عبد سعيد، د. سمير بشير حديد 1983 ج. الموصل. لخطأ هو أنَّ f متناظرة والصحيح هو أنَّ D متناظرة حول المحور x (أو النصف السفلي من D هو إنعكاس للنصف العلوي من D بالنسبة الى المحور x).

Solutions of Exercises (page 87 8^{th} ed.) حلول تمارين ص 87

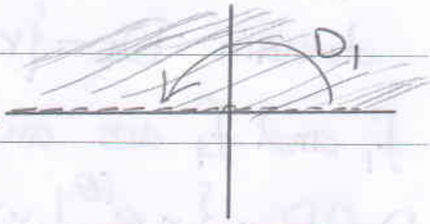
1. Suppose that $f(z)=$ Constant in some N (neighborhood) in D, N is a domain because it is open and connected.

So by the theorem of "uniquely determined" f must be constant in D, which is contraduction.

2. $f_1(z)=\sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}}$, $r>0$, $0<\theta<\pi$ is analytic into its domain $D_1=\{re^{i\theta} \mid r>0, 0<\theta<\pi\}$

$f_2(z)$ is analytic into its domain $D_2=\{re^{i\theta} \mid r>0, \frac{\pi}{2}<\theta<2\pi\}$

f_1 and f_2 are analytic in

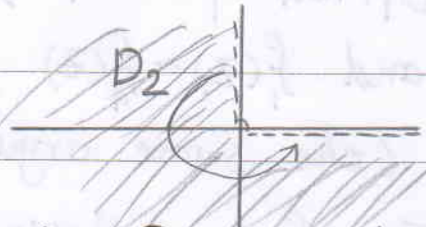


$D_1\cap D_2=\{re^{i\theta} \mid r>0, \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\}$

and clear that

$f_1(z)=f_2(z)$ for each $z\in D_1\cap D_2$

(the same argument).



Thus f_2 is analytic continuation of f_1 into $D_2=D_1\cap D_2 \cup$ lower half plane $\cup$ negative real axis.

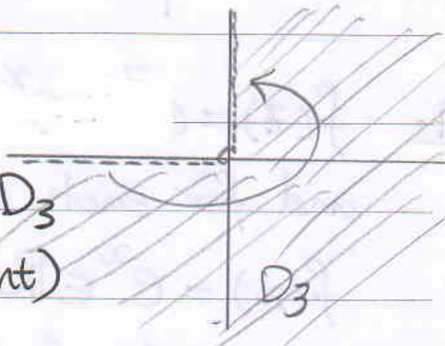
Now f_3 is analytic into its domain $D_3=\{re^{i\theta} \mid r>0, \pi<\theta<\frac{5\pi}{2}\}$

f_2 and f_3 are analytic in $D_2\cap D_3$

$D_2\cap D_3=\{re^{i\theta} \mid r>0, \pi<\theta<2\pi\}$

and $f_2(z)=f_3(z)$ for each $z\in D_2\cap D_3$

(the same argument)



Thus f_3 is analytic continuation of f_2 into $D_3=(D_2\cap D_3)\cup$ first quadrant $\cup$ positive real axis.

But $D_1\cap D_3=$ The first quadrant of plane, and for each

$z \in D_1 \cap D_3$ we have $z = re^{i\theta_3} = re^{i\theta_1}$,

$$f_3(z) = f_3(re^{i\theta_3}) = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta_3}{2} + i\sin\frac{\theta_3}{2}\right), \ 2\pi < \theta_3 < \frac{5\pi}{2}$$

$$= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta_1+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta_1+2\pi}{2}\right), \ 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$= \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta_1}{2}+\pi\right)\right)$$

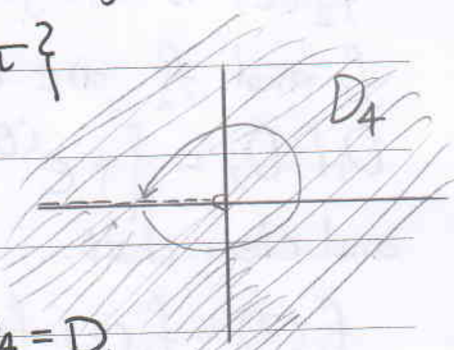
$$= \sqrt{r}\left(-\cos\frac{\theta_1}{2} - i\sin\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta_1}{2} + i\sin\frac{\theta_1}{2}\right)$$

$$= -f_1(z)$$

Thus f_3 is not analytic continuation of f_1.

3. $f_4(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$, $r>0, -\pi<\theta<\pi$ is analytic into its domain $D_4 = \{re^{i\theta} \mid r>0, -\pi<\theta<\pi\}$



f_1 and f_4 are analytic in $D_1 \cap D_4$

$D_1 \cap D_4 = \{re^{i\theta} \mid r>0,\ 0<\theta<\pi\} = D_1$

and $f_1(z) = f_4(z)$ for each $z \in D_1 \cap D_4 = D_1$

(the same argument)

Thus f_4 is analytic continuation of f_1 into $D_4 = D_1 \cup$ the lower half plane $\cup$ positive real axis

$D_4 - D_1 = \{re^{i\theta} \mid r>0, -\pi<\theta\leq 0\}$ = positive real axis $\cup$ the lower half plane.

4. $f(z) = e^z = e^x e^{iy}$ is analytic in the plane, and for each $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = D$ ($\mathbb{R} = L$) we have $f(x) = e^x \in \mathbb{R}$, thus by the theorem of reflection principle f satisfy $\overline{f(z)} = f(\bar{z})\ \forall z \in \mathbb{C}$.

We can see the same result directly for each $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{f(z)} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)}$$
$$= e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$f(\bar{z}) = e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy}$$
$$= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y))$$
$$= e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$= \overline{f(z)}.$$

5. Suppose that

1. f analytic in a domain D;
2. L (segment of the x axis) $\subset D$;
3. $z \in D$ iff $\bar{z} \in D$.

Then $\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$ iff $f(x)$ is pure imaginary or Zero for each $(x,0) \in L$.

Proof. ($\Longleftarrow$) Let $g(z) = if(z)$, which is analytic in D,
for each $(x,0) \in L$, $g(x) = if(x) \in \mathbb{R}$ [$f(x)$ is pure imaginary]
So by the theorem of reflection principle,

$$\overline{g(z)} = g(\bar{z}) \text{ for each } z \in D.$$
$$\overline{f(z)} = \overline{-i\,g(z)} \quad \left[g(z) = if(z),\ f(z) = \frac{g(z)}{i} = -ig(z) \right]$$
$$= i\,\overline{g(z)}$$
$$= i\,g(\bar{z}) = i^2 f(\bar{z}) \quad [\text{by definition of } g]$$
$$= -f(\bar{z}).$$

($\Longrightarrow$) If $(x,0) \in L$, then $\overline{f(x)} = -f(\bar{x}) = -f(x)$

$$u(x,0) - iv(x,0) = -u(x,0) - iv(x,0)$$

$\therefore u(x,0) = 0$, So $f(x)$ pure imaginary or Zero for each $x \in L$.