مقرر التحليل المتجهات

السنة الأولى | الفصل الثاني

2013 - 2012

كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

مفردات المقرر :

1- الأشعة و العمليات عليها .

2 – المستقيم و المستوي في $\mathbb{R}^3$.

3 – التوابع السلمية و التوابع الشعاعية .

4 – التدرج و التباعد و الدوران .

5 – المعادلات التفاضلية .

مدرسة المقرر : د. نور غازي

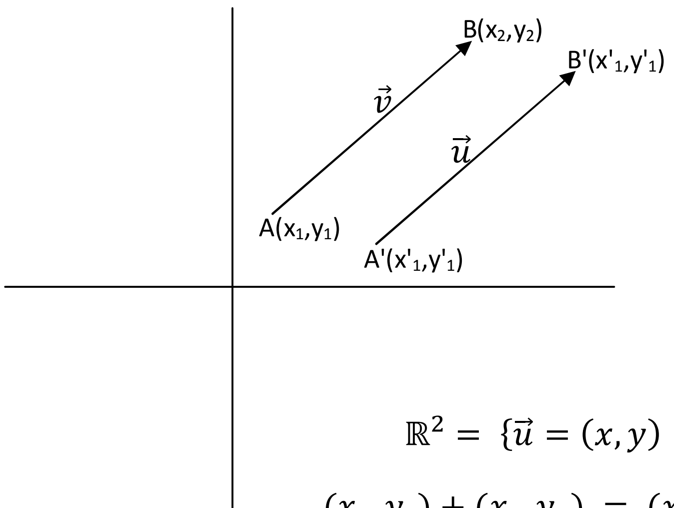
إعداد الطالب : أيهم عبد الرحمن

1- الأشعة و العمليات عليها

تعريف الشعاع :

هو صف تكافؤ كل القطع المستقيمة المحددة بنقطتين و الموجهة باتجاه معين .

تعريف صف التكافؤ :



$$\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ |\vec{u}| = |\vec{v}| \\ 2)\ \text{جهة } \vec{u} \text{ تساوي جهة } \vec{v} \\ 3)\ \vec{v} \,\backslash\backslash\, \vec{u} \end{cases}$$

الفضاء $\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي :

$$\mathbb{R}^2 = \{\vec{u} = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

إن $(\mathbb{R}^2, +, *)$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حيث أن :

1) $(\mathbb{R}^2, +)$ زمرة تبديليه .

2) إن $*$ يحقق :

$$\text{I) } 1 * \vec{u} = \vec{u}$$

$$\text{II) } (\lambda_1 * \lambda_2)\vec{u} = \lambda_1(\lambda_2 * \vec{u})$$

$$\text{III) } (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{u}$$

ضرب شعاع بعدد حقيقي :

ليكن $\vec{v}(x,y)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$:

إن الشعاع $\lambda\vec{v}$ هو شعاع : طويلته : هي $|\vec{v}| * |\lambda|$

جهته : حسب إشارة λ : $\lambda\vec{v}$ من جهة $\vec{v}$ $\Leftarrow$ $\lambda > 0$

$\lambda\vec{v}$ عكس جهة $\vec{v}$ $\Leftarrow$ $\lambda < 0$

حالة خاصة : $\boxed{\lambda = -1}$

بالنسبة لـــ $\vec{v}(x,y)$ عندئذٍ $-\vec{v}(-x,-y)$

جمع و طرح الأشعة :

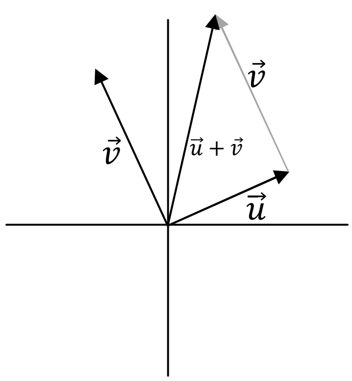
ليكن $\vec{u}(x_1,y_1)$ وَ $\vec{v}(x_2,y_2)$ شعاعين فإن $\vec{u}+\vec{v}$:

جبرياً :

$$\vec{u}+\vec{v} = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

هندسياً :

الشكل



الطويلة :

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

تمرين :

ليكن $\vec{u}(2,3)$, $\vec{v}(5,4)$, $\vec{w}(-4,2)$

1) احسب $\vec{u}-3\vec{v}$ و احسب طويلته .

2) مثّل هندسياً $\vec{w}-\vec{u}$

شعاع الواحدة :

نقول عن $\vec{e}$ أنه شعاع واحدة إذا كانت طويلته تساوي الواحد .

مثال :

في $\mathbb{R}^2$ لدينا الشعاعين $\overrightarrow{e_2} = \vec{j} = (0,1)$ $\overrightarrow{e_1} = \vec{i} = (1,0)$

وهي أشعة واحدة قانونية .

ملاحظة :

كل شعاع في $\mathbb{R}^2$ يكتب بدلالة $\overrightarrow{e_2}$ وَ $\overrightarrow{e_1}$ $\forall \vec{v}(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x,0) + (0,y) = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow$

تعريف شعاع الواحدة باتجاه الشعاع $\vec{v}$:

ليكن $\vec{v}(x,y) \Leftarrow$ إن الشعاع $\overrightarrow{e_v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}\right) : \frac{1}{|\vec{v}|} > 0, |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ هو شعاع واحدة

و اتجاهه باتجاه $\vec{v}$ (حامل $\vec{v}$ نفسه حامل $\overrightarrow{e_v}$)

إن الشعاع $\overrightarrow{e_v}$: طويلته = 1 لأن $|\overrightarrow{e_v}| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|} * \vec{v}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|} * |\vec{v}| = 1$

جهته من جهة $\vec{v}$ لأن $\frac{1}{|\vec{v}|}$ موجب .

الجداء السلمي :

تعريف :

ليكن $\vec{v}(x_2, y_2)$ وَ $\vec{u}(x_1, y_1)$ نعرف الجداء الداخلي لـ $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ بأنه المقدار العددي التالي :

$\vec{v}.\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\theta$: θ هي الزاوية بين $\vec{v}$ وَ $\vec{u}$ ، $0 \leq \theta < 2\pi$

تعريف 2 :

$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

ملاحظات (تحقق منها) :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) $(\lambda.\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(\lambda.\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

3) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$

4) $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ وَ $\vec{\imath}.\vec{\imath} = 1$ وَ $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1$

تعامد شعاعين :

نقول عن $\vec{v}$ وَ $\vec{u}$ أنهما متعامدان إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ أي $\vec{u}.\vec{v} = 0$ " لأن $cos\frac{\pi}{2} = 0$ "

أمثلة :

1) ليكن $\vec{v}(3,2)$ وَ $\vec{u}(1,2)$ ، أوجد $\vec{u}.\vec{v}$

2) ليكن $\vec{v}(-2,1)$ وَ $\vec{u}(1,2)$ ، أثبت أن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدان .

الحل :

1) $\vec{u}.\vec{v} = (1)(3) + (2)(2) = 3 + 4 = 7$

2) $\vec{u}.\vec{v} = (1)(-2) + (2)(1) = -2 + 2 = 0 \Longleftarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftarrow$ $\vec{v}$ وَ $\vec{u}$ متعامدان .

ملاحظة :

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} \iff \vec{v}.\vec{v} = |\vec{v}|.|\vec{v}|.\cos\theta = |\vec{v}|^2$$

مثال :

ليكن $\vec{v}(1,1)$ احسب زاوية $\vec{v}$ مع $x'ox$ و $y'oy$

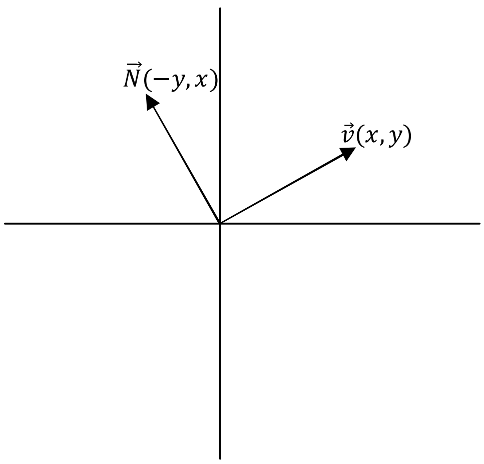
الحل :

الزاوية بين $\vec{v}$ و $x'ox$ هي الزاوية بين $\vec{v}$ و $\vec{i}$ أي $\vec{v}.\vec{i} = 1 \Rightarrow 1 = |\vec{v}|.|\vec{i}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

لكن $\widehat{\vec{i}\,\vec{j}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{\vec{v}\,\vec{j}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

مثال2 :

ليكن $\vec{v}(x,y)$ احسب الشعاع العمودي على $\vec{v}$ والذي طوله 1 =



الحل :

لدينا $\vec{N}(-y,x)$ عامودي على $\vec{v}$

إن $\frac{\vec{N}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{w}$ هو الشعاع المطلوب .

معادلة مستقيم :

لتكن $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ نقطتين في $\mathbb{R}^2$ ، إن معادلة المستقيم الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

أو المستقيم المار بـ A و B بحيث $\overrightarrow{AB} \backslash\backslash \overrightarrow{MA}$ ((حيث $M(x,y)$ تتحرك على المستقيم))

$$\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{y-y_1} \Rightarrow y = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1) + y_1$$

عادة نكتب :

$$y = m\,(x-x_0) + y_0$$

حالات خاصة :

$$y_1 = y_2 \Rightarrow D: y = y_1$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow D: x = x_1$$

في حالة $\mathbb{R}^3$:

يكون لدينا $\overrightarrow{oz}$ كبعد إضافي و يصبح الشعاع من الشكل : $\vec{v}(x,y,z) : \ |\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مثال :

1) اكتب شعاع الموضع للنقطة $P(5,1,0)$ واحسب طويلته .

2) اكتب شعاع التوجيه المعين بـ $A(3,2,1)$ و $B(5,2,3)$.

3) أوجد إحداثيات Q التي تقسم القطعة المحددة بـ A و B .

الحل :

1) $\overrightarrow{OP} = 5\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 3\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$

2) $\overrightarrow{AB} = (2,0,2)$

3) $$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x-3 = \frac{2}{3} \\ y-2 = 0 \\ z-1 = \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{11}{3} \\ y = 2 \\ z = \frac{5}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Q = \left(\frac{11}{3}, 2, \frac{5}{3}\right)$$

الجداء السلمي :

ليكن $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ $\Leftarrow$ مقدار عددي $= \vec{u} * \vec{u}$

$$\vec{u} * \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos\theta \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{cases}$$

ملاحظات :

1) $0 = \vec{u} * \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

2) جيوب تمام الشعاع $\vec{v}$ هي زوايا الشعاع مع المحاور $oxyz$

جمل الإحداثيات :

1) تسمى جملة الإحداثيات "جملة متعامدة" إذا كان كل شعاعين من الجملة متعامدين مثنى مثنى .

2) تسمى جملة الإحداثيات "جملة متعامدة قانونية" أو " جملة قانونية" إذا كانت الجملة متعامدة و طول كل شعاع منها =1

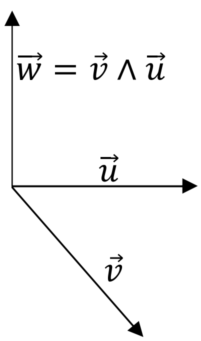
أمثلة :

1) الجملة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ جملة قانونية .

2) $\{(1,1,1)(-1,1,0)(-1,-1,2)\}$ جملة متعامدة لكن ليست قانونية .

الجداء الخارجي :

ليكن $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ وَ $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ شعاعين في $\mathbb{R}^3$ نعرف الجداء الخارجي لـ $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ بأنه الشعاع $\vec{w}$ بحيث :



$$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$|\vec{w}| = |\vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{v}| * |\vec{u}| * \sin\theta$: θ هي الزاوية بين $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$: $0 \leq \theta < 2\pi$

ملاحظات :

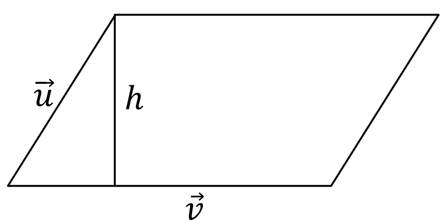
1) $\vec{v} \wedge \vec{u} \neq \vec{u} \wedge \vec{v}$

2) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

3) إن $|\vec{v} \wedge \vec{u}|$ تمثل :

$$|\vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{v}| * |\vec{u}| * \sin\theta = |\vec{v}| * h$$

= مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\vec{u}$ وَ $\vec{v}$



مسقط شعاع :

$$|\overrightarrow{u_x}| = |\vec{u}| * \cos\theta = |\vec{u}| * \frac{\vec{u} * \vec{x}}{|\vec{u}| * |\vec{x}|} = \vec{u} * \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \vec{u} * \overrightarrow{e_x}$$

الجداء المختلط :

ليكن $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ وَ $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ وَ $\vec{w}(x_3, y_3, z_3)$ ثلاثة أشعة في $\mathbb{R}^3$

نعرف الجداء المختلط لـ $(\vec{u}$ وَ $\vec{v}$ وَ $\vec{w})$ بأنه :

$$(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) * \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

هندسياً :

$$(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) * \vec{w} = |\vec{u} \wedge \vec{v}| * |\vec{w}| * \cos\theta = |\vec{u} \wedge \vec{v}| * h = s * h = V$$

يمثل الجداء المختلط حجم متوازي السطوح المنشأ على الأشعة السابقة .

أمثلة :

1) ليكن $\vec{u}(1,2,-1)$ ، $\vec{v}(-2,1,3)$ و المطلوب :

I) احسب $2\vec{u} + \vec{v}$ واحسب طويلته .

II) احسب جيوب تمام $\vec{u}$.

III) احسب الزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{u}$.

2) ليكن $\vec{u}(x,y,z)$ شعاع في $\mathbb{R}^3$ بحيث جيوب تمامه هي :

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ زاويته مع ox و $\beta = \frac{\pi}{3}$ زاويته مع oy و $\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \pi$ زاويته مع oz و $|\vec{u}| = 10$

والمطلوب : إيجاد x, y, z

3) ليكن $\vec{u}(2,3,-1)$ و $\vec{v}(0,-2,4)$ و $\vec{w}(-5,3,1)$ والمطلوب :

I) احسب $(3\vec{u} - 4\vec{v} + 3\vec{w})$ ، $-3(5\vec{v} + \vec{w})$ ، $3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5\vec{w}$ ، $3(\vec{u} * \vec{v})$

، $\vec{u} \wedge (3\vec{v})$ واحسب طويلة الأخير

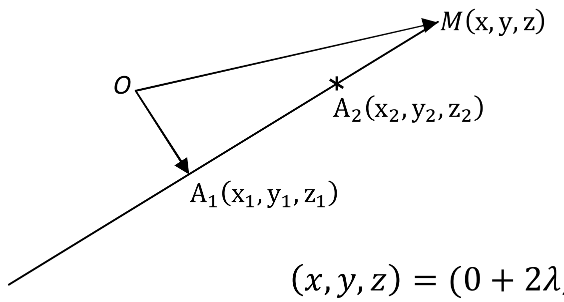
II) عين شعاع الواحدة باتجاه الشعاع $\vec{w_1}(-4,-3,0)$.

III) احسب الزاوية بين $\vec{v}$ و $\vec{u}$.

VI) احسب حجم متوازي السطوح الذي أحرفه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$.

V) هل تشكل الجملة $\vec{e_3}(0,-1,0)$, $\vec{e_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ جملة متعامدة قانونية ؟

2- المستقيم و المستوي في $\mathbb{R}^3$



المستقيم في $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{oA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{oM}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oA_1}+\lambda\,\overrightarrow{A_1A_2}$$

يسمى $\vec{A}$ بشعاع التوجيه $\quad \overrightarrow{X_l}\ =\ \vec{\alpha}\ +\lambda\ \ \vec{A}$

فمثلاً من أجل $\vec{\alpha}(0,2,5)$ و $\vec{A}(2,1,5)$ $\ (x,y,z)=(0+2\lambda,2+\lambda,5+5\lambda)$

مثال :

أوجد معادلة المستقيم المار من $B_2(2,2,2)$ و $B_1(2,0,4)$ وتحقق هل $D(2,-2,6)$ تقع عليه

الحل :

1) $(x,y,z)=(2,0,4)+\lambda(0,2,-2)=(2\,,2+2\lambda\,,2-2\lambda)$

$$\Rightarrow\ x=2\ \backslash\ y=2+2\lambda\ \backslash\ z=2-2\lambda$$

" يمكن أخذ $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB_2}$ لكن عندها يجب أخذ $\vec{A}=\overrightarrow{B_2B_1}$ "

2) نعوض إحداثيات D في المعادلات السابقة :

$$\Rightarrow\ 2=2\ \backslash -2=2+2\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=-2\ \backslash\ 6=2-2\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=-2$$

$\Leftarrow$ D تنتمي للمستقيم

أوضاع المستقيمات في $\mathbb{R}^3$:

ليكن $\overrightarrow{X_{l_1}}\ =\overrightarrow{\alpha_1}+\lambda\,\vec{A}$ و $\overrightarrow{X_{l_2}}\ =\overrightarrow{\alpha_2}+\mu\,\vec{B}$ لمعرفة أوضاع المستقيمين نتبع ما يلي :

$$\overrightarrow{X_{l_1}}=\overrightarrow{X_{l_2}}\Rightarrow\overrightarrow{\alpha_2}+\mu\,\vec{B}=\overrightarrow{\alpha_1}+\lambda\,\vec{A}\Rightarrow\lambda\,\vec{A}-\mu\,\vec{B}=\overrightarrow{\alpha_2}-\overrightarrow{\alpha_1}$$

بعد الإسقاط نجد جملة ثلاث معادلات نأخذ المصفوفة الموسعة لها ونحلها و بحسب الحل لدينا ثلاث حالات :

مستحيلة الحل $\Leftarrow$ المستقيمين متوازيين أو متخالفين

حل وحيد $\Leftarrow$ المستقيمين متقاطعين

عدد غير منته من الحلول $\Leftarrow$ المستقيمين منطبقين

مثال :

ليكن l_1 مستقيم شعاع توجيهه $(1,2,-1)$ وَ مار من $(3,2,1)$

وَ l_2 مستقيم مار بــ $(4,0,-1)$ وَ $(-2,-1,-1)$ عين وضع l_1 مع l_2

الحل :

$$\overrightarrow{X_{l_1}} = (3,2,1) + \lambda(1,2,-1) \text{ وَ } \overrightarrow{X_{l_2}} = (4,0,-1) + \mu(-6,-1,0)$$

$$(\lambda + 6\mu, 2\lambda + \mu, -\lambda) = (1,-2,-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & \vdots & -2 \\ -1 & 0 & \vdots & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & \vdots & 1 \\ 0 & -11 & \vdots & -4 \\ -1 & 6 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

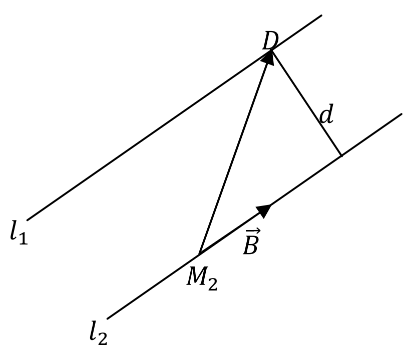
$\Rightarrow -11\lambda = -4 \,, 6\lambda = -1 \Rightarrow$ مستحيلة الحل

البعد بين مستقيمين :

I) المستقيمين متوازيان :

ليكن $\overrightarrow{X_{l_1}} = \overrightarrow{\alpha_1} + \lambda \vec{A}$ وَ $\overrightarrow{X_{l_2}} = \overrightarrow{\alpha_2} + \mu \vec{B}$: $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{\alpha_1}$ وَ $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{\alpha_2}$ فإن :

$$\left|\overrightarrow{M_2D} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{B}\right| d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{M_2D} \wedge \vec{B}\right|}{\left|\vec{B}\right|}$$



تمرين :

أوجد البعد بين المستقيمين : $\overrightarrow{X_{l_1}} = (3,0,1) + \mu(2,2,2)$, $\overrightarrow{X_{l_1}} = (1,1,4) + \lambda(1,1,1)$

ملاحظة : " يمكن اعتبار $M_1 = D$ "

II) المستقيمين متقاطعين :

عندها $d = 0$ و الزاوية بينهما تحسب من خلال المعادلة :

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} * \vec{B}}{\left|\vec{A} * \vec{B}\right|}$$

تمرين :

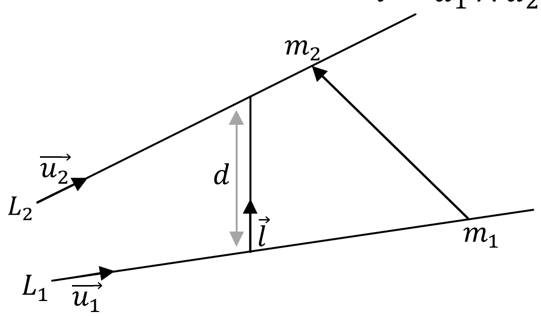
أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين و الزاوية بينهما

$$\overrightarrow{X_{l_1}} = (1,1,0) + \lambda(2,1,1)\ ,\ \overrightarrow{X_{l_1}} = (2,0,2) + \mu(1,-1,2)$$

III) المستقيمان متخالفان :

$$\vec{l} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{m_1 m_2} * \vec{l}\right| = \left|\vec{l}\right| * \vec{l} \text{ على } \overrightarrow{m_1 m_2} \text{ مسقط } \Rightarrow \left|\vec{l}\right| * d$$

$$\Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{m_1 m_2} * \vec{l}\right|}{\left|\vec{l}\right|}$$



مثال :

احسب البعد بين المستقيمين السابقين $\overrightarrow{X_{l_1}} = (2,0,2) + \mu(1,-1,2)$ و $\overrightarrow{X_{l_1}} = (1,1,0) + \lambda(2,1,1)$

الحل :

ندرس حالة المستقيمين أولا

$$\lambda(2,1,1) - \mu(1,-1,2) = (2,0,2) - (1,1,0) \Rightarrow (2\lambda - \mu\ ,\ \lambda + \mu\ ,\ \lambda - 2\mu) = (1,-1,2)$$

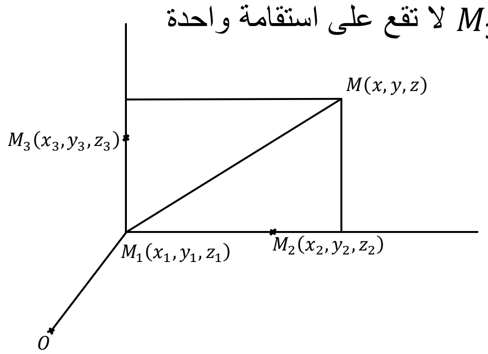
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$n = r = r' = 2$ أي للجملة حل وحيد $\mu = -1 \setminus \lambda = 0$ فالمستقيمان متقاطعان أي البعد بينهما 0 =

المستوي في الفراغ :

المعادلة الوسيطية :

لتكن النقط $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ، $M_3(x_3, y_3, z_3)$ لا تقع على استقامة واحدة



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1 M} : \overrightarrow{M_1 M} = \lambda_1 \overrightarrow{M_1 M_2} + \lambda_2 \overrightarrow{M_1 M_3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{X_E} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda_1 \overrightarrow{M_1 M_2} + \lambda_2 \overrightarrow{M_1 M_3}$$

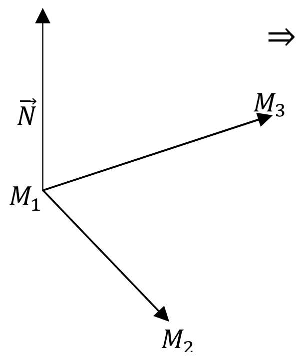
الشكل الناظمي :

لتكن النقط $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ، $M_3(x_3,y_3,z_3)$ لا تقع على استقامة واحدة

$$\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}=(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\overrightarrow{M_1M}\perp\vec{N}\Rightarrow\overrightarrow{M_1M}*\vec{N}=0\ \Rightarrow(x-x_1,y-y_1,z-z_1)*(\alpha,\beta,\gamma)=0$$

$$\Rightarrow\alpha x+\beta y+\gamma z+h=0\ \Rightarrow\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$



مثال :

1) أوجد المعادلة الوسيطية للمستوي المار بالنقط $(0,0,0),(2,5,4),(1,1,2)$

2) أوجد المعادلة الناظمية للمستوي المار بالنقطة $(0,1,2)$ والذي ناظمه $\vec{N}=(4,2,1)$

الحل :

1) $M_1=0\ \Rightarrow\ \overrightarrow{X_E}=\lambda_1(2,5,4)+\lambda_2(1,1,2)=(2\lambda_1+\lambda_2,5\lambda_1+\lambda_2,4\lambda_1+2\lambda_2)$

2) $4x+2y+z+h=0$ بتعويض النقطة التي يمر بها المستقيم بالمعادلة السابقة نجد أن $h=-4$

$$4x+2y+z-4=0$$

وضع مستويين في $\mathbb{R}^3$:

ليكن لدينا المستويين $\overrightarrow{X_{E_1}}=\overrightarrow{\alpha_1}+\lambda\overrightarrow{u_1}+\mu\overrightarrow{v_1}$ و $\overrightarrow{X_{E_2}}=\overrightarrow{\alpha_2}+\gamma\overrightarrow{u_2}+\delta\overrightarrow{v_2}$

يحدد الوضع بين المستويين السابقين من خلال حلول المعادلة :

$$\overrightarrow{X_{E_1}}=\overrightarrow{X_{E_2}}\ \Rightarrow\ \lambda\overrightarrow{u_1}+\mu\overrightarrow{v_1}-\gamma\overrightarrow{u_2}-\delta\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-\overrightarrow{\alpha_1}=\vec{\beta}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \gamma & \delta & \vdots & \vec{\beta}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

$r \neq r'$ ⇐ مستحيلة الحل ⇐ المستويين متوازيين و غير منطبقين

$n - r = 2$ ⇐ مجهولين اختياريين ⇐ المستويين منطبقين (المجهولين هما λ_1 و λ_2 للمستوي الوحيد)

$n - r = 1$ ⇐ مجهول اختياري ⇐ المستويان متقاطعان (المجهول هو λ للمستقيم)

تمرين :

عين وضع المستويين $\overrightarrow{X_{E_1}} = (1,0,0) + \lambda(-1,2,0) + \mu(-1,0,1)$ و $\overrightarrow{X_{E_2}}(0,1,0) + \gamma(1,2,1) + \delta(0,4,0)$

وضع مستقيم مع مستو :

تقاطع مستو مع مستقيم :

$$\overrightarrow{X}_L = \vec{\alpha} + \lambda\vec{u} : \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{X}_E = \vec{\beta} + \mu\vec{v} + \delta\vec{w} : \mu, \delta \in \mathbb{R}$$

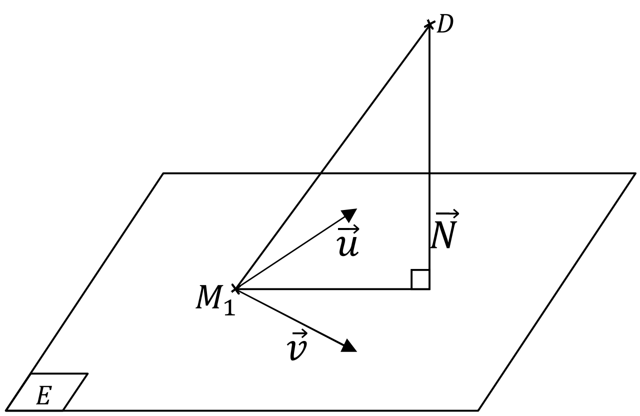
تمرين :

أوجد وضع المستوي $\overrightarrow{X}_E$ مع المستقيم $\overrightarrow{X}_L$ حيث أن :

$$\overrightarrow{X}_E = (2,-1,3) + \mu(0,1,0) + \delta(4,2,-1)$$

$$\overrightarrow{X}_L = (1,2,3) + \lambda(2,0,2)$$

بعد نقطة عن مستوي :



$$\overrightarrow{X}_E = \vec{\beta} + \mu\vec{v} + \delta\vec{w} : \lambda \in \mathbb{R}$$

و M نقطة في $\mathbb{R}^3$ حيث $\vec{N} = \vec{v} \wedge \vec{u}$

$$\left|\overrightarrow{M_1M}.\vec{N}\right| = \left|\vec{N}\right|.d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M}.\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|}$$

ملاحظة :

من أجل باقي الحالات :

بعد مستقيم عن مستوي موازي له : هو بعد نقطة من المستقيم عن المستوي

بعد مستوي عن مستوي موازي له : هو بعد نقطة من المستوي الأول عن المستوي الثاني

مثال :

احسب بعد $Q(3,1,5)$ عن المستوي $\overrightarrow{X}_E = (1,2,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,2,2)$

الحل :

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,-2) \Rightarrow |\vec{N}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{oM_1} = (1,2,0)\,, \overrightarrow{oQ} = (3,1,5) \Rightarrow \overrightarrow{M_1Q} = (3,1,5) \Rightarrow |\overrightarrow{M_1Q}.\vec{N}| = |(-4-2-10)| = 16$$

$$d = \frac{16}{2\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

3- التوابع السلمية و التوابع الشعاعية

تعريف التابع السلمي :

لتكن $w \in \mathbb{R}^3$ التابع السلمي هو $f : w \to \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$

تعريف التابع الشعاعي :

$$\vec{f} : w \to \mathbb{R}^3$$

$$M \to \vec{f}(M) = f_1(M)\vec{i} + f_2(M)\vec{j} + f_3(M)\vec{k}$$

$$\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

نهاية تابع شعاعي :

نقول عن $\vec{A}$ أنها نهاية لـ $\vec{f}$ عندما M تسعى نحو θ أي $\lim\limits_{M\to\theta} \vec{f} = \vec{A}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |M-\theta| < \delta \Rightarrow \left|\vec{f}(M) - \vec{A}\right| < \varepsilon$$

خواص :

1) $\lim\limits_{M\to\theta} \vec{f}(M) = \left(\lim\limits_{M\to\theta} \vec{f_1}(M) \ , \ \lim\limits_{M\to\theta} \vec{f_1}(M) \ , \ \lim\limits_{M\to\theta} \vec{f_1}(M)\right)$

2) $\lim\limits_{M\to\theta} \vec{f}(M) \pm \vec{g}(M) = \lim\limits_{M\to\theta} \vec{f}(M) \pm \lim\limits_{M\to\theta} \vec{g}(M)$

3) $\lim\limits_{M\to\theta} \vec{f}(M) \ {}^{*}_{/}\ \vec{g}(M) = \lim\limits_{M\to\theta} \vec{f}(M) \ {}^{*}_{/}\ \lim\limits_{M\to\theta} \vec{g}(M)$

تعريف المشتق :

ليكن التابع الشعاعي $\qquad f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \to (x^2)\vec{\imath} + (z^2)\vec{\jmath} + (5)\vec{k}$$

$$(1,5,0) \to (1,0,5)$$

نقول عن $\vec{f}$ أنه قابل للاشتقاق عند $M_0 \in W$ إذا و فقط إذا كان

$\lim\limits_{M\to M_0} \frac{\vec{f}(M) - \vec{f}(M_0)}{M - M_0} =$ نهاية محدودة

بحيث إذا كانت $(M_0)\ \frac{d\vec{f}}{dm} = f'(M_0)$ موجودة و محدودة

$$\overrightarrow{f'}(M_0) = f_1'(M_0)\vec{\imath} + f_2'(M_0)\vec{\jmath} + f_3'(M_0)\vec{k} \ : \ \vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$$

خواص :

ليكن $\vec{g}$, $\vec{f}$ تابعين شعاعيين :

I) $\vec{f} : W_1 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \vec{g} : W_2 \to \mathbb{R}^3$

نرمز بـ $W = W_1 \cap W_2$ ((تقاطع مجموعتي المنطلق))

يرمز للمقصور بـ $\vec{f}_{|W}$ ويعني منطلق f يقتصر على W

$$\vec{f}_{|W} = \vec{f} : W \to \mathbb{R}^3 \text{ و } \vec{g}_{|W} = \vec{f} : W \to \mathbb{R}^3$$

II) 1) $\frac{d(\vec{f}+\vec{g})}{dM} = \frac{d\vec{f}}{dM} + \frac{d\vec{g}}{dM}$

2) $\frac{d(\vec{f}*\vec{g})}{dM} = \frac{d\vec{f}}{dM}\vec{g} + \vec{f}\frac{d\vec{g}}{dM}$

3) $\frac{d(\vec{f}\wedge\vec{g})}{dM} = \frac{d\vec{f}}{dM}\wedge \vec{g} + \vec{f}\wedge\frac{d\vec{g}}{dM}$

III) ليكن $h : W \to \mathbb{R}$ تابع عددي فإن : $\frac{d(h*\vec{g})}{dM} = \frac{dh}{dM}\vec{g} + h\frac{d\vec{g}}{dM}$

تعريف :

نقول عن $\vec{f}$ أنه مستمر عند $M_0 \in W$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{M\to M_0} \vec{f} = \vec{f}(M_0)$

تعريف المشتق الجزئي ∂ :

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{f}(x+\Delta x,y,z)-\vec{f}(x,y,z)}{\Delta x}$$

المنحني :

هو تابع شعاعي من الشكل

$$\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

$$t \to \vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

يرمز عادة للمنحني بـ $\mathcal{C}$

1) المنحني $\mathcal{C}$ بدايته $\vec{f}(a)$ نهايته $\vec{f}(b)$

2) المنحني $\mathcal{C}$ مغلق $\Leftrightarrow \vec{f}(a) = \vec{f}(b)$

3) نقول عن النقطة $r_0 \in \mathcal{C}$ إنها مضاعفة إذا وفقط إذا وجد $t_1 \neq t_2$ من $[a,b]$ بحيث

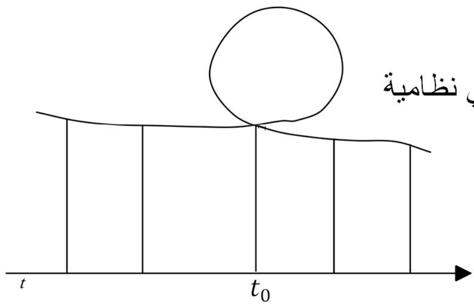
$$\vec{f}(t_1) = \vec{f}(t_2)$$

المنحني البسيط :

نقول عن المنحني أنه بسيط إذا كان لا يحوي نقاط مضاعفة

النقطة الشاذة :

نقول عن $t_0 \in [a,b]$ أنها شاذة إذا وفقط إذا كان $\vec{f}'(t_0) = 0$ وإلا فهي نظامية



المنحني الأملس :

$$\forall\, t \in [a,b] \Rightarrow \vec{f}(t) \neq 0$$

تعريف :

ليكن $\vec{f}$ منحني أملس عندها : شعاع واحدة المماس $\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}$

شعاع واحدة الناظم الأساسي :

ليكن $\vec{f}$ منحني قابل للاشتقاق مرتين عندها $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$

شعاع واحدة ثنائي الناظم : $\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N}$

ملاحظة :

1) $\vec{B} * \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{N}$

2) $\vec{B} * \vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{T}$

طول المنحني :

ليكن C منحني أملس عندها طول المنحني من a إلى t بأنه :

$$S(t) = \int_a^t |\vec{f}'(t)|\, dt \;\Rightarrow\; \frac{dS(t)}{dt} = |\vec{f}'(t)| \;\Rightarrow\; S'(t) = |\vec{f}'(t)|$$

تقوس المنحني :

$$K(t) = \frac{1}{S'(t)} |\vec{T}'(t)| = \frac{1}{|\vec{f}'(t)|} |\vec{T}'(t)|$$

حساب $\vec{T}\,,\vec{N}\,,\vec{B}$ بدلالة $\vec{f}$ ومشتقاتها :

$$\boxed{\vec{T}(t)=\frac{\vec{f'}(t)}{\left|\vec{f'}(t)\right|}}\quad ....(1)$$

$$\vec{T}(t)=\frac{1}{S'(t)}\vec{f'}(t)$$

$$\vec{f'}=S'\,\vec{T}\ \Rightarrow\ \vec{f''}=S''\,\vec{T}+S'\,\vec{T'}\ \Rightarrow\ \vec{f''}=S''\,\vec{T}+S'(\left|\vec{T'}\right|*\vec{N})$$

لكن $\vec{N}=\frac{\vec{T'}}{\left|\vec{T'}\right|}\Rightarrow\ \vec{f''}=S''*\vec{T}+\vec{S'}\left|\vec{T'}\right|*\vec{N}$

$$\boxed{\vec{f''}=\underbrace{S''}_{\text{تسارع مماسي}}*\vec{T}+\underbrace{S'^2\,K}_{\text{تسارع ناظمي}}\vec{N}}\quad ....\ (2)$$

$$\vec{T}\,S'=\vec{f'}\Rightarrow\vec{f'}\wedge\vec{f''}=S'*S''*\vec{T}\wedge\vec{T}+s'^3*K(t)*\vec{T}\wedge\vec{N}$$

$$=0+S'^3+K(t)*\vec{B}(t)\Rightarrow\left|\vec{f'}\wedge\vec{f''}\right|=S'^3\,K(t)\Rightarrow\ \ K(t)=\frac{\left|\vec{f'}\wedge\vec{f''}\right|}{S'^3}$$

$$\vec{f'}\wedge\vec{f''}=S'^3\left|\vec{f'}\wedge\vec{f''}\right|\vec{B}(t)\Rightarrow\ \boxed{\vec{B}(t)=\frac{\vec{f'}\wedge\vec{f''}}{\left|\vec{f'}\wedge\vec{f''}\right|}}\ ....(3)$$

شعاع الالتفاف :

يعرف بأنه $\frac{\vec{B'}(t)}{s'(t)}$ بحيث يوجد تابع سلمي $\tau(t)$ يسمى التفاف التابع $\vec{f}$ بحيث :

$$\frac{\vec{B'}(t)}{s'(t)}=-\tau(t)\vec{N}(t)\Rightarrow\ \ \tau=\frac{\vec{B'}(t)*\vec{N'}(t)}{S'(t)}=\frac{1}{S'}*\frac{\vec{f'}\wedge\vec{f''}}{\left|\vec{f'}\wedge\vec{f''}\right|}*\vec{N'}$$

$$\boxed{\tau(t)=\frac{\left(\vec{f'}.\vec{f''}.\vec{f'''}\right)}{\left|\vec{f'}\wedge\vec{f''}\right|^2}}\ ....(4)$$

مثال :

ليكن المنحني $\vec{f}:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^3$: $\quad t\rightarrow\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ \frac{t}{2\pi}\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow x\\ \rightarrow y\\ \rightarrow z\end{matrix}$

أوجد $\tau,K,S,\vec{B},\vec{N},\vec{T}$ لـ $\vec{f}$

$$\vec{f'} = \left(-\sin t\,,\cos t\,,\frac{1}{2\pi}\right) \Rightarrow |f'| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi^2+1}{4\pi^2}}$$

نفرض $\boxed{\alpha^2 = \frac{4\pi^2+1}{4\pi^2}} \Rightarrow |f'| = \alpha \Rightarrow \vec{T} = \left(-\frac{\sin t}{\alpha}, \frac{\cos t}{\alpha}, \frac{1}{2\pi\alpha}\right)$

$$\vec{T'} = \left(-\frac{\cos t}{\alpha}, -\frac{\sin t}{\alpha}, 0\right) \Rightarrow \vec{T'} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\alpha} + \frac{\sin^2 t}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \vec{N} = (-\cos t\,, -\sin t\,, 0)$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sin t}{\alpha} & \frac{\cos t}{\alpha} & \frac{1}{2\pi\alpha} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin t}{2\pi\alpha}\,\vec{i} - \frac{\cos t}{2\pi\alpha}\,\vec{j} + \frac{1}{\alpha}\,\vec{k} \Rightarrow \vec{B} = \left(\frac{\sin t}{2\pi\alpha}, -\frac{\cos t}{2\pi\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

يترك الباقي للطالب كتمرين

معادلة المنحني بدلالة S :

1) نحسب $S(t)$ أي S تابع لـ t

2) نحسب t بدلالة S ونعوض

فمثلاً :

احسب طول المنحني الممثل بدائرة نصف قطرها r :

$$\vec{f} : [0\,, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to (r\cos t\ , r\sin t)$$

$$x = r\cos t \quad \text{و} \quad y = r\ \sin t \quad : \quad r > 0$$

$$S(t) = \int_0^t \left|\vec{f'}(x)\right| dt = \int_0^t \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\ dt = r\,t \Rightarrow S(2\pi) = 2\pi r$$

في المثال نحول من $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 : t \to \big(x(t), y(t)\big)$

إلى $\vec{f} : [0, l] \to \mathbb{R}^2 : t \to \big(x(S), y(S)\big)$

حيث أن $l = S(b) = S(2\pi) = 2\pi r$ و $S = rt \Rightarrow t = \frac{S}{r}$

$$\vec{f} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2 : S \to \left(r\cos\frac{S}{r}\,, r\sin\frac{S}{r}\right)$$

معادلات فرينيه :

ليكن $\vec{f}$ منحني أملس :

$$\vec{f} : [0, l] \to \mathbb{R}^2$$

$$S \to \big(x(S)\,, y(S)\,, z(S)\big)$$

$$\overrightarrow{f''}(S_0) \neq 0\ \forall S_0 \in [0, l]$$

فإن

$$1)\ \ \overrightarrow{T'}(S_0) = K(S_0) \times \vec{N}(S_0)$$

$$2)\ \ \overrightarrow{B'}(S_0) = -\tau(S_0) \times \vec{N}(S_0)$$

$$3)\ \ \vec{N}(S_0) = -K(S_0) \times \vec{T}(S_0) + \tau(S_0) \times \vec{B}(S_0)$$

برهان (1) :

$$\overrightarrow{T'}(S_0) = \left|\overrightarrow{T'}(S_0)\right| \times \vec{N}(S_0)\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ (\mathrm{I})$$

ولكن

$$K(t) = \frac{\left|\overrightarrow{T'}(S_0)\right|}{S'(t)}\ \ \Rightarrow\ \ K(S_0) = \left|\overrightarrow{T'}(S_0)\right|$$

نعوض في (I)

$$\overrightarrow{T'}(S_0) = K(S_0) \times \vec{N}(S_0)$$

السطوح في $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \to \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

كما يرمز بـ $\vec{f}_v = \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}$ و $\vec{f}_u = \vec{r}_u = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u}$

مثلاً :

$$(u,v)\to \begin{vmatrix} u & \in [0,1] \\ v & \in [0,2] \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D=\{[0,1]\times[0,2]\}$$

ملاحظات :

- ❖ نقول عن النقطة $M_0(u_0,v_0)\in D$ أنها شاذة إذا كان $(\overrightarrow{r_u}\wedge\overrightarrow{r_v})(M_0)=0$
- ❖ نقول عن السطح أنه أملس إذا لم يحوي نقاط شاذة
- ❖ ناظم السطح هو $\vec{N}=\frac{\overrightarrow{r_u}\wedge\overrightarrow{r_v}}{|\overrightarrow{r_u}\wedge\overrightarrow{r_v}|}$

نفرض :

$$\left.\begin{matrix} E=\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_u} \\ F=\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v} \\ G=\overrightarrow{r_v}\times\overrightarrow{r_v}\end{matrix}\right\}\Rightarrow d2S=Ed2u+2Fdudv+Gd2v$$

المعادلة المترية لـ (S)

مثال :

ليكن السطح S معرفاً كما يلي :

$$\vec{f}:\,]0,\infty[\times]0,\infty[\to\mathbb{R}^3$$

$$(u,v)\to\frac{1}{(u^2+v^2+1)}\times(u,v,u^2+v^2)$$

الحل :

$$\Rightarrow\vec{f}(u,v)=\left(\frac{u}{(u^2+v^2+1)},\frac{v}{(u^2+v^2+1)},\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2+1)}\right)$$

$$\overrightarrow{r_u}=\left(\frac{(u^2+v^2+1)-2uu}{(u^2+v^2+1)^2},\frac{-2uv}{(u^2+v^2+1)^2},\frac{2u(u^2+v^2+1)-2u(u^2+v^2)}{(u^2+v^2+1)^2}\right)$$

$$\overrightarrow{r_u}=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}(v^2-u^2+1,-2uv,\ 2u)$$

$$\overrightarrow{r_v}=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}(-2uv,\ u^2+v^2+1-2v^2,\ 2v(u^2+v^2+1)-2v(u^2+v^2))$$

$$\overrightarrow{r_v}=\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}(-2uv,\ u^2-v^2+1,\ 2v)$$

$$\Rightarrow E = \vec{r_u} \times \vec{r_u} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\left((v^2 - u^2 + 1)^2 + uu^2v + uu^2\right) = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow F = \vec{r_u} \times \vec{r_v} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^4}\left(-2uv(v^2 - u^2 + 1) - 2uv(u^2 - v^2 + 1) + 4uv\right) = 0$$

$$\Rightarrow G = \vec{r_v} \times \vec{r_v} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow dS^2 = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}(du^2 + dv^2)$$

4- التدرج و التباعد و الدوران

التدرج $\overrightarrow{grad}$:

ليكن f تابع سلمي ، نعرف تدرج f بالرمز $\overrightarrow{grad\ f}$:

$$\overrightarrow{grad\ f} = \vec{\nabla} \times f \quad : \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

فمثلاً :

$$f(x,y,z) = x\,y\,z \Rightarrow \overrightarrow{grad\ f} = \vec{\nabla} \times f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = yz\,\vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$$

خواص :

$$1)\ \vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}\,f + \vec{\nabla}\,g$$

$$2)\ \vec{\nabla}(\lambda\,f) = \lambda\,\vec{\nabla}\,f$$

$$3)\ \overrightarrow{grad\ \ f \times g} = \left(\overrightarrow{grad\ \ f}\right)g + f\left(\overrightarrow{grad\ \ g}\right)$$

التباعد div :

ليكن f تابع شعاعي ، نعرف تباعد f بأنه :

$$div\left(\vec{f}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{f} : \vec{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(f_1\,\vec{\imath} + f_2\,\vec{\jmath} + f_3\,\vec{k}\right)$$

مثال :

$$\vec{f} = xy^2\,\vec{\imath} + ln\,(z)\,y^2\,\vec{\jmath} + ln\,(z)\,\vec{k}$$

$$div\,(\vec{f}) = y^2 + 2y\,ln(z) + \frac{1}{z}$$

مثال :

احسب تباعد $\overrightarrow{grad\,f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

$$div(\overrightarrow{grad\,f}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial 2f}{\partial x^2} + \frac{\partial 2f}{\partial y^2} + \frac{\partial 2f}{\partial z^2}$$

نسمي الشكل التالي بمؤثر لابلاس :

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

الدوران :

يعرف لأجل التوابع الشعاعية و هو الجداء الخارجي للمؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ مع التابع الشعاعي

أي ليكن f تابع شعاعي حيث $\vec{f} = \{f_1\,, f_2\,, f_3\}$ نعرف الدوران أنه :

$$\overrightarrow{rot\,f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

تمرين :

احسب دوران $\overrightarrow{grad\;\;f}$

الحل :

$$\overrightarrow{rot(grad\;\;f)} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial 2f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial 2f}{\partial z\,\partial y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial 2f}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial 2f}{\partial z\,\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial 2f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial 2f}{\partial y\,\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

تمرين :

ليكن $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :\ f(x,y,z) = (3xz^2, 2xy^2, -x^2yz)$

و $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : g(x,y,z) = 3x^3 - yz$

1) احسب $\vec{\nabla}(g\,\vec{f})$ ، $div\,(f)$ ، $\overrightarrow{rot\ f}$.

2) ليكن $\vec{h}(x,y,z) = (yzln(z), -zxln(z), xy)$ احسب $\overrightarrow{rot\ (h)}$

5-المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية الكلية :

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

يكون الحل عبارة عن تابع بدون مشتقات

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة : $y' - \frac{1}{x} = 0$

$$y' - \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = ln\,|x| + c}$$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية لوجود ثابت c فيه ، ويجب ألا يحوي مشتقات

ولإيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية نعوض بقيمة c بعدد ما حسب شروط تعطى في المسألة

مثال2 :

المعادلة التفاضلية الكلية الناتجة من المعادلة $x.y.z = u$ من الشكل :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

حل المعادلة التفاضلية الكلية :

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

خطوات الحل :

1) قابلية الحل : وهو الشرط الكافي واللازم للحل :

$$\vec{f} \times \overrightarrow{rot\,f} = \vec{0} \quad : \quad \vec{f} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$$

2) الاختصار : نعتبر أحد المتحولات ثابت أي مشتقه صفر ونشكل التابع :

$$\boxed{u(x,y,z) = c} \ldots\ldots \text{(I)}$$

3) نحسب عامل التكميل μ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\,Q \quad \text{أو} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu\,P$$

4) نحسب k : $\quad k = \mu\,R - \frac{\partial u}{\partial z}$

ثم نستخدمها في المعادلة $\quad du + k\,dz = 0$

ونحل الأخيرة فتصبح من الشكل :

$$\Psi(u,z) = c_1$$

ثم نعوض u من (I)

مثال :

$$y^2z\,dx + x^2z\,dy - x^2y^2\,dz = 0$$

الحل :

$$1)\ \vec{f} = y^2z\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} - x^2y^2\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot\,f} = \big((-2y-1)x^2\big)\vec{i} + \big((2x+1)y^2\big)\vec{j} + \big((2x-2y)z\big)\vec{k}$$

$$\vec{f}\,\overrightarrow{rot\,f} = y^2z\big((-2y-1)x^2\big) + x^2z\big((2x+1)y^2\big) - x^2y^2\big((2x-2y)z\big)$$

$$= \underline{-2x^2y^3z}\ \underline{\underline{-x^2y^2z}}\ \underline{\underline{\underline{+2x^3y^2z}}}\ \underline{\underline{+x^2y^2z}}\ \underline{\underline{\underline{-2x^3y^2z}}}\ \underline{+2x^2y^3z} = 0$$

وهي قابلة للحل .

2) نعتبر z ثابت $\Rightarrow y^2z\,dx + x^2z\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c_1 \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

3) $\frac{du}{dx} = \mu\,P \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \mu\,zy^2 \Rightarrow \quad \mu = -\frac{1}{x^2y^2z}$

4) $k = \mu\,R - \frac{du}{dz} = \frac{-1}{x^2y^2z}(-x^2y^2) + 0 = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{z}}$

$\Rightarrow\ du + k\,dz = 0 \ \Rightarrow\ du + \frac{1}{z}dz = 0 \Rightarrow u + ln\,|z| = c_2$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + ln|z| = c_2$ وهو الحل العام

تمرين :

$$ydx + xdy + \frac{xy}{1-z}\,dz = 0$$

حالات خاصة :

1) $\overrightarrow{rot\,f} = \vec{0}$

شرح الحل عن طريق المثال

مثال :

$$y^2z\,dx + x^2z\,dy - x^2y^2\,dz = 0$$

مثلاً :

$$y\,dx + x\,dy + z\,dz = 0$$

$$\overrightarrow{rot\,f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \Psi = xy + \frac{1}{2}z^2$$

((لا نكرر xy أو نكتب $2xy$ إذا وجدت من حد آخر))

2) a) $P(x)\,dx + Q(y)\,dy + R(z)\,dz = 0$:

$\Rightarrow\ \int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy + \int R(z)\,dz = c$

b) $P(y,z)\,dx + Q(x,z)\,dy + R(x,y)\,dz = 0$

نتأكد من قابلية الحل ثم نقسم على (x,y,z) ترجع الى الحالة (a)

مثال :

$$yz\,dx + 2xz\,dy - 3xy\,dz = 0$$

بالحل نجد أن $\vec{f} \times \overrightarrow{rot\,f} = \vec{0}$ فنقسم على xyz فنجد

$$\frac{1}{x}dx + \frac{2}{y}dy - \frac{3}{z}dz = 0 \;\Rightarrow\; ln|x| + 2ln|y| - 3ln|z| = c \Rightarrow ln\left|\frac{x.y^2}{z^3}\right| = c \Rightarrow \frac{x.y^2}{z^3} = c_2$$

3) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy + R(z)\,dz = 0$:

$$c = \Psi(x,y) + \int R(z)\,dz = \varphi(x,y,z)$$

مثال : $y^2xz\,dx + x^2yz\,dy - dz = 0$

بالحل نجد أن $\vec{f} \times \overrightarrow{rot\,f} = \vec{0}$ أي قابلة للحل فنقسم على z

$$y^2x\,dx + x^2y\,dy - \frac{dz}{z} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{y^2x^2}{2} - ln|z| = c$$

تمارين :

$$(\cos x + e^x y)dx + (e^x + e^y z)dy + e^y\,dz = 0 \quad (1)$$

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0 \quad (2)$$

الحلول النهائية :

$$(1)\;\; \overrightarrow{rot\,f} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \sin x + e^x y + e^y z = c$$

$$(2)\;\; xyz = c$$

انتهى المقرر .

مع تمنياتي لكم بالنجاح

إعداد : أيهم عبد الرحمن