

مدخل إلى الرياضيات المتقطعة
سنة ٣ رياضيات - ٢٠١١ / ٢٠١٢
د. وسام طلب

الفصل الأول : طرائق العد

مقدمة :

إن الرياضيات المتقطعة هي فرع من فروع الرياضيات يهتم بدراسة مسائل تتعلق بمجموعات متقطعة (قابلة للعد) ، مثل المسائل اللتي تكون فيها المتغيرات تأخذ قيماً متقطعة ، اي في مجموعة قابلة للعد. فيندرج ضمنها (على سبيل الذكر لا الحصر) كلاً من الفروع التالية:

نظرية الأعداد - التوافيق و الترتيب - نظرية الاحتمالات - طرق العد - العلاقات - المجموعات المرتبة جزئياً - جبر المنطق - طرق البرهان الرياضي - الاستقراء الرياضي - نظرية المجموعات - نظرية البيان - الخوارزميات.

فعلى سبيل المثال : إن مجموعة حلول المعادلة $x + y = 5$ ، في مجموعة الأعداد الحقيقية ، ليست قابلة للعد فهي تقابل مجموعة نقاط المستقيم الممثل بتلك المعادلة في المستوى. بينما مجموعة حلول هذه المعادلة في \mathbb{N} مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة قابلة للعد (كونها مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد) وبالتالي فإن هذه المسألة الأخيرة (في \mathbb{N}) تندرج ضمن الرياضيات المتقطعة.

في كل مما يلي سنرمز

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

$F(X, Y)$ أو Y^X مجموعة كل التطبيقات من X إلى Y .

$Inv(X, Y)$ مجموعة كل التطبيقات المتباينة من X إلى Y .

$Bij(X, Y)$ مجموعة كل التقابلات من X إلى Y .

$\mathcal{P}(X)$ أو 2^X جماعة المجموعات الجزئية من X .

$$C_n^k = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} , \quad 0 \leq k \leq n$$

$$A_n^k := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) , \quad 0 \leq k \leq n$$

$\mathcal{P}_k(X) = C_X^k = \binom{|X|}{k}$ جماعة المجموعات الجزئية من X المؤلفة من k عنصر .

$$A_X^k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j; \forall i \neq j\} , \quad \forall \quad 0 \leq k \leq |X|$$

و منه

$$\mathcal{P}_k([n]) = C_{[n]}^k = \binom{[n]}{k} , \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n$$

و

$$A_{[n]}^k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in [n] , \quad x_i \neq x_j; \forall i \neq j\} , \quad 0 \leq k \leq n$$

و فيما يلي سنقوم بإيجاد صيغ و علاقات لحساب عدد عناصر المجموعات المنتهية التالية (حيث نفترض أن X, Y مجموعتين منتهيتين)

$$F(X, Y) , \quad Inj(X, Y) , \quad Bij(X, Y) , \quad \mathcal{P}(X) , \quad A_{[n]}^k , \quad C_{[n]}^k$$

1. تعريف

لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n ، سندعو ترتيب من الحجم k ($\leq n$) للمجموعة A أي متتالية (x_1, x_2, \dots, x_k) من عناصر A ، عناصرها مختلفة عن بعضها مثنى مثنى .

2. تعريف

نعرف قدرة مجموعة منتهية A بأنه عدد عناصرها ، وسنرمزه $card(A) = |A| = \#A$.

3. تعريف

نقول عن مجموعتين (منتهيتين أو غير منتهيتين) أن لهما نفس القدرة إذا وجد تقابل بينهما.

4. تمرين

لنزد المجموعة $\mathcal{P}(X)$ بالعلاقة \sim المعرفة كما يلي

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \sim B \iff |A| = |B|$$

أثبت أن \sim علاقة تكافؤ، و أن صف تكافؤ أي مجموعة جزئية من X مثل A هو $\mathcal{P}_{|A|}(X)$.

5. تمرين

من أجل أي مجموعتين متتهيتين غير خاليتين A, B أثبت أن $|F(A, B)| = |B|^{|A|}$

الحل

لنفرض أن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ وليكن $f: A \rightarrow B$ تطبيقاً ما، عندئذٍ فإن هناك n امكانية لاختيار $f(a_1)$ ، وكذلك n امكانية لاختيار $f(a_2)$ ، وهكذا ... ، حتى n امكانية لاختيار $f(a_m)$. وبالتالي فإنه حسب المبدأ الأساسي للعد هناك n^m طريقة لاختيار التابع f .

6. تمرين

لتكن X, Y مجموعتين متتهيتين غير خاليتين بحيث $|X| \leq |Y|$ أثبت أن $|Inj(X, Y)| = A_{|Y|}^{|X|}$.

الحل

لنفرض أن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ وليكن $f: X \rightarrow Y$ تطبيقاً متبايناً، عندئذٍ فإن هناك n امكانية لاختيار $f(x_1)$ ، و $n-1$ امكانية لاختيار $f(x_2)$ ، و $n-2$ امكانية لاختيار $f(x_3)$ ، وهكذا ... ، حتى $n - (m-1) = n - m + 1$ امكانية لاختيار $f(x_m)$.

وبالتالي فإنه حسب المبدأ الأساسي للعد ، عدد طرق اختيار f هو

$$n(n-1) \cdots (n-m+1) = A_n^m = A_{|Y|}^{|X|}$$

7. تمرين

أثبت أن كل تطبيق متباين بين مجموعتين متتهيتين لهما نفس عدد العناصر سيكون تقابلاً، ثم اضرب مثلاً معاكساً من أجل المجموعات غير المنتهية (أي أوجد تابع بين مجموعتين غير متتهيتين لهما نفس القدرة، بحيث يكون هذا التابع متباين وغير تقابل) .

الحل

لنفرض أن $|A| = |B|$ ، و ليكن $f: A \rightarrow B$ تطبيقاً متبايناً، عندئذٍ فإن $|A| = |f(A)|$ ، لكن $|A| = |B|$ ، ومنه $|B| = |f(A)|$ ، وبما أن $f(A)$ مجموعة

جزئية من المجموعة المنتهية B فإن $B = f(A)$ ، فالتابع $f : A \rightarrow B$ تقابل .
ولنضرب الآن مثلاً معاكساً، أي لنوجد تابع بين مجموعتين غير متتهيتين لهما
نفس القدرة، بحيث يكون هذا التابع متباين وغير تقابل. لنأخذ التابع

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n + 1 \end{aligned}$$

ف نجد أن f متباين و غير غامر .

8. تمرين

١. من أجل كل $0 \leq k \leq n$ أثبت أن $|A_{[n]}^k| = A_n^k$.
٢. استنتج أن عدد التراتيب من الحجم n للمجموعة $[n]$ هو $n!$.
٣. استنتج أنه من أجل أي مجموعتين X, Y متتهيتين غير خاليتين لهما نفس عدد العناصر n فإن $|Bij(X, Y)| = n!$.

الحل

1- إن التابع التالي تقابل (تحقق من ذلك)

$$\begin{aligned} f : Inj([k], [n]) &\rightarrow A_{[n]}^k \\ f &\mapsto (f(1), f(2), \dots, f(k)) \end{aligned}$$

ومنه

$$|A_{[n]}^k| = |Inj([k], [n])|$$

لكن حسب التمرين 6 لدينا

$$|Inj([k], [n])| = A_n^k$$

و منه

$$|A_{[n]}^k| = A_n^k.$$

2- إن عدد التراتيب من الحجم n للمجموعة $[n]$ يساوي عدد التطبيقات المتباينة بين المجموعة $[n]$ و نفسها .

3- ينتج من التمرين 7 و من الفقرة 2 من هذا التمرين .

9. تعريف

نعرف التبديل على مجموعة A بأنه تقابل من A إلى A ، وسنرمز $S(A)$ مجموعة كل التباديل على A ، كما سنرمز S_n مجموعة كل التباديل على المجموعة $[n]$.

النتيجة التالية هي تطبيق مباشر من التعريف 9 و التمرين 8 .

10. نتيجة

من أجل كل عدد طبيعي موجب n فإن $|S_n| = n!$.

11. تمرين

لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n ، أثبت أن عدد المجموعات الجزئية من A والمؤلفة من k ($\leq n$) عنصر ، هو

$$|C_{[n]}^k| = C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

الحل حسب التمرين 8. فإن $|A_{[n]}^k| = A_n^k$ ، ومن أجل الحصول على المجموعة $A_{[n]}^k$ انطلاقاً من المجموعة $[n]$ فإننا نختار أولاً كل المجموعات الجزئية من $[n]$ المؤلفة من k عنصر، ومن ثم عدد امكانيات ترتيب كل مجموعة هو $k!$. و بالتالي حسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ المؤلفة من k عنصر هو $\frac{A_n^k}{k!}$.

12. تمرين

الهدف من هذا التمرين هو اثبات علاقة منشور نيوتن

١- ليكن لدينا n صندوق، يحوي كل منهم على كرة بيضاء و كرة سوداء، نسحب من كل صندوق كرة واحدة فقط ، بكم طريقة يمكن الحصول على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء .

٢- استنتج مما سبق علاقة منشور نيوتن، أي أنه من أجل كل $a, b \in \mathbb{R}^*$ ، $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

الحل

إن عملية الحصول على k كرة بيضاء و $n - k$ كرة سوداء

13.

تمرين

أجب عما يلي

- ١- بكم طريقة يمكن جلوس شخص و زوجته على أربع كراسي؟
 - ٢- بكم طريقة يمكن توزيع كرتين إحداهما بيضاء والأخرى سوداء على أربع صناديق بحيث تكون الكرتان في صندوقين مختلفين؟
 - ٣- ما هو عدد عناصر المجموعة $A = \{(m, n) \in \{1, 2, 3, 4\}^2 / m \neq n\}$ ؟
 - ٤- ما هو عدد الأعداد الطبيعية التي أحادها وعشراتهما أصغر تماماً من 4 و التي لا تقبل القسمة على 11 ؟
- الجواب في الأسئلة الأربعة السابقة هو $A_4^2 = 12$.

14.

تمرين

ليكن r, n عددين طبيعيين بحيث $0 < r \leq n$ ، والمطلوب

- ١- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متماثلة على n صندوق، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر .
- ٢- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متميزة على n صندوق بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر .

15.

تمرين

أثبت دون استخدام الاستقراء الرياضي أن

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} , \forall 0 \leq k \leq n$$

الحل

لنثبت k, n بحيث $0 \leq k \leq n$ ، نعلم أن

$$\mathcal{P}_k([n]) = \{B \subset [n] \mid |B| = k\} , \quad |\mathcal{P}_k([n])| = \binom{n}{k}$$

ولنعرف المجموعتين التاليتين

$$X := \{B \subset [n] \mid |B| = k, 1 \in B\}$$

$$Y := \{B \subset [n] \mid |B| = k, 1 \notin B\}$$

من الواضح أن

$$X \cup Y = \mathcal{P}_k([n]) , \quad X \cap Y = \emptyset$$

وبالتالي

$$|\mathcal{P}_k([n])| = |X| + |Y|$$

كما أن

$$|Y| = \binom{n-1}{k} , \quad |X| = \binom{n-1}{k-1}$$

ومنه

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k([n])| = |X| + |Y| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

16. تمرين

أثبت أن

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n - 1$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0 - 2$$

17. تمرين

من أجل $k \leq m, n$ أثبت أن

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k} \binom{n}{0}$$

الحل

طريقة أولى
انطلاقاً من العلاقة

$$(x + y)^{m+n} = (x + y)^m \cdot (x + y)^n$$

طريقة ثانية

$$\begin{aligned} \binom{m+n}{k} &= |\mathcal{P}_k(\{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\})| \\ &= \sum_{i=0}^k |\mathcal{P}_i(\{a_1, a_2, \dots, a_m\})| \cdot |\mathcal{P}_{k-i}(\{b_1, b_2, \dots, b_n\})| \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} \end{aligned}$$

18. تمرين

أثبت أن عدد المسارات Γ من $(0,0)$ حتى (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

19. تمرين

لنفرض أن $0 \leq k \leq n$ ، ما هو عدد حلول المعادلة

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

في المجموعة $\{0,1\}$.

20. تمرين

ليكن لدينا n نقطة في المستوي بحيث أن أي ثلاثة منها لا تقع على استقامة واحدة، و المطلوب

١- ما هو عدد المستقيمات المارة بنقطتين من هذه المجموعة.

٢- ما هو عدد المثلثات الممكن تشكيلها من ثلاث نقاط من المجموعة المعطاة.

21. تمرين

لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n ، أثبت أن عدد أجزاء A هو 2^n ، أي أن $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

الحل طريقة أولى ان التابع التالي تقابل

$$\begin{array}{ccc} \chi : \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \{0,1\}^A \\ B & \longmapsto & \chi_B \end{array}$$

حيث $\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ الدالة المميزة للمجموعة B المحتواة في A و المعرفة كما يلي

$$\forall x \in A, \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B \\ 0 & \text{if } x \notin B \end{cases}$$

إن χ تقابل لأنه من أجل كل تابع $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ فإنه توجد مجموعة وحيدة $B := f^{-1}(\{1\})$ تحقق $f = \chi_B$.

و من التقابل السابق ينتج أن $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A|$ ، و بما أن $|\{0,1\}^A| = 2^{|A|}$ فإن $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

طريقة ثانية

إن مسألة توزيع عناصر A والتي عددها n في إحدى المجموعتين B أو B^c يماثل توزيع n كرة متمايزة على صندوقين وبالتالي فالنتيجة 2^n .

طريقة ثالثة

لتكن $\mathcal{P}_k(A)$ جماعة المجموعات الجزئية من A المؤلفة من $k (\leq n)$ عنصر، عندئذٍ فإن $|\mathcal{P}_k(A)| = \binom{n}{k}$ ومنه

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_k(A) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

طريقة رابعة

لتكن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، و لتكن X_n مجموعة رؤوس مكعب الواحدة في \mathbb{R}^n أي أن $X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_i \in \{0,1\}, \forall i\}$ حيث $|X_n| = 2^n$ ، عندئذٍ فإن التطبيق

$$\begin{array}{ccc} \Psi : X_n & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \{a_j \in A / x_j = 1, j \in [n]\} \end{array}$$

هو تقابل ، وبالتالي $|\mathcal{P}(A)| = |X_n| = 2^n$.

تعميم منشور الكرخي - نيوتن :

22. مبرهنة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall |x| < 1, \quad \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^m$$

الإثبات
طريقة أولى

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^n} &= \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdots \frac{1}{(1-x)} \\ &= \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{N}} x^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2 \in \mathbb{N}} x^{k_2} \right) \cdots \left(\sum_{k_n \in \mathbb{N}} x^{k_n} \right) \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}} x^{k_1} x^{k_2} \cdots x^{k_n} \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}} x^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \\ &= \sum_{m \geq 0} |\{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n / k_1 + k_2 + \dots + k_n = m\}| \cdot x^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^m. \end{aligned}$$

طريقة ثانية

نعلم أن منشور تايلور ماكلوران للتابع f يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

حيث $f^{(k)}(0)$ هو المشتق النوني للتابع $f(x)$ عند $x = 0$.
ليكن

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$$

فنجـد

$$f'(x) = n(1-x)^{-n-1} , \quad f''(x) = n(n+1)(1-x)^{-n-2}, \dots, \\ f^{(k)}(x) = n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1) (1-x)^{-n-k}$$

ومنه

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

وبالتالي

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^m. \quad \blacksquare$$

تعميم تعريف $\binom{n}{k}$ من أجل $n \in \mathbb{Z}$:

لنعرف الحدودية التالية في حلقة الحدوديات $\mathbb{Q}[x]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad \binom{x}{n} := \frac{x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1)}{n!}$$

فعلى سبيل المثال

$$\binom{x}{2} := \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

ومنه من أجل كل $a \in \mathbb{R}$ ، $n, k \in \mathbb{N}^*$ فإن

$$\begin{aligned}
\binom{a}{n} &= \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}. \\
\binom{-1}{n} &= \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{n(n-1)\cdots 2.1}{n!} = (-1)^n. \\
\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.
\end{aligned}$$

إذاً

$$\boxed{\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}}$$

بالتعويض في المبرهنة السابقة نجد أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $|x| < 1$ فإن

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-n} &= \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{m \geq 0} \binom{m+n-1}{m} x^m \\
&= \sum_{m \geq 0} (-1)^m \binom{-n}{m} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-n}{m} (-x)^m.
\end{aligned}$$

لكننا نعلم أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x \in \mathbb{R}$ فإن

$$(1-x)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-x)^m$$

وإذا عرّفنا

$$\forall k > n \geq 0, \quad \binom{n}{k} := 0$$

نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad (1-x)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} (-x)^m$$

ما يبرهن صحة النتيجة التالية

نتيجة 23.

من أجل كل عدد صحيح $n \in \mathbb{Z}$ ومن أجل كل $|x| < 1$ فإن

$$(1-x)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} (-x)^m.$$

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^m.$$

تمارين إضافية

24.

تمرين

أجب عما يلي

١- ما هو عدد عناصر المجموعة

$$A = \{(a, b, c) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^3 / a \neq b, b \neq c, a \neq c\}$$

٢- بكم طريقة يمكن توزيع كرتين إحداهما بيضاء والأخرى سوداء على خمس صناديق بحيث تكون الكرتان في صندوقين مختلفين؟

٣- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متماثلة على n صندوق ($r \leq n$) ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر؟

٤- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متميزة على n صندوق ($r \leq n$) ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر؟

٥- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة متميزة على n صندوق ؟

٦- بكم طريقة يمكن توزيع r كرة بيضاء و s كرة سوداء و t كرة حمراء ($r + s + t = n$) على n صندوق ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة فقط ؟

٧- ما هو عدد الأعداد الطبيعية الأصغر تماماً من 100 و التي أحادها وعشراتهما أصغر تماماً من 7 و لا تقبل القسمة على 11 ؟

٨- ما هو عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ في المجموعة $\{0, 1\}$ ؟

٩- ما هو عدد عناصر المجموعة

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n\}$$

١٠- ما هو عدد عناصر المجموعة

$$B = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq n\}$$

25. تمرين

- ١ - بكم طريقة يمكن توزيع n كرة متماثلة على k صندوق.
- ٢ - استنتج عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ في \mathbb{N} .

26. تمرين

- ليكن لدينا n نقطة في المستوي بحيث أن أي ثلاثة منها لا تقع على استقامة واحدة، و المطلوب
- ١ - ما هو عدد المستقيمات المارة بنقطتين من هذه المجموعة.
 - ٢ - ما هو عدد المثلثات الممكن تشكيلها من ثلاث نقاط من المجموعة المعطاة.

27. تمرين

- الهدف من هذا التمرين هو اثبات علاقة منشور نيوتن
- ١ - ليكن لدينا n صندوق، يحوي كل منهم على كرة بيضاء و كرة سوداء، نسحب من كل صندوق كرة واحدة فقط ، بكم طريقة يمكن الحصول على k كرة بيضاء و $n - k$ كرة سوداء .
 - ٢ - استنتج مما سبق علاقة منشور نيوتن، أي أنه من أجل كل $a, b \in \mathbb{R}^*$ ، $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

28. تمرين

أثبت أن

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n - 1$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0 \quad - 2$$

29. تمرين

من أجل $k \leq m, n$ أثبت أن

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

توجيه

طريقة أولى

انطلاقاً من العلاقة

$$(x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n$$

طريقة ثانية

بالبحث عن عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ و المؤلفة من k عنصر.

30. تمرين

لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n ، أثبت أن عدد أجزاء A هو 2^n ، أي أن $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

توجيه :

طريقة أولى

أوجد تقابل بين المجموعتين $\mathcal{P}(A), \{0, 1\}^A$.

طريقة ثانية

إن مسألة توزيع عناصر A والتي عددها n في إحدى المجموعتين B أو B^c مماثل توزيع n كرة متميزة على صندوقين.

طريقة ثالثة

إن الجماعة $\{\mathcal{P}_k(A), 0 \leq k \leq n\}$ تشكل تجزئة للمجموعة $\mathcal{P}(A)$ ، كما أن $|\mathcal{P}_k(A)| = \binom{n}{k}$.

طريقة رابعة

هناك تقابل بين مجموعة أجزاء المجموعة $\{1, 2, 3\}$ ومجموعة رؤوس المكعب في الفراغ \mathbb{R}^3 .

31. تمرين

أثبت دون استخدام الاستقراء الرياضي أو الحساب المباشر أن

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

توجيه :

فكر بتوزيع كرة بيضاء و $k-1$ كرة سوداء على n صندوق ، بحيث أن كل صندوق يحوي كرة واحدة على الأكثر.

32. تمرين

ليكن m, n عددين طبيعيين موجبين مثبتين ، ولتكن n_1, n_2, \dots, n_m أعداد طبيعية مثبتة بحيث $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ ، ما هو عدد التطبيقات الغامرة $f : [m] \rightarrow [n]$ التي تحقق

$$f^{-1}(\{i\}) = n_i , \quad \forall i \in [m]$$

33. تمرين

أثبت أن عدد المخططات Γ من $(0,0)$ حتى (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

34. تمرين

أوجد عدد التطبيقات المتزايدة تماماً $f : [n] \rightarrow [m]$ ، حيث $n \leq m$.

35. تمرين

أوجد عدد التطبيقات المتزايدة $f : [n] \rightarrow [m]$.

36. تمرين

أوجد عدد عناصر المجموعة

$$\{x_1 x_2 \cdots x_n \mid x_i \in \{2, 3, 7\}\}$$

37. تمرين

أثبت أن جداء k عدد صحيح متتالي سيقبل القسمة على $k!$.

38. تمرين

لتكن R حلقة تبديلية ، و لتكن $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة الحدوديات بالتحويلات x_1, x_2, \dots, x_n ، أوجد عدد عناصر المجموعة $R[x_1, x_2, \dots, x_n] \supset A$ المعطاة كما يلي :

$$A := \left\{ \prod_{i=1}^n z_i \mid z_i \in \{x_1, \dots, x_m\} \right\}$$

39. تمرين

لتكن المجموعة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، نعرّف $W_m(A)$ مجموعة الكلمات التي طولها m على الأبجدية A كما يلي :

$$W_m(A) := \{w := w_1 w_2 \cdots w_m \mid w_i \in A, \forall i \in [m]\}$$

و نعرف $W(A)$ مجموعة الكلمات على الأبجدية A كما يلي

$$W(A) := \cup_{m \geq 0} W_m(A)$$

و المطلوب :

1- ما هو عدد عناصر المجموعة $W_m(A)$.

2- لتكن الأعداد الطبيعية المثبتة k_1, k_2, \dots, k_n بحيث $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ ، و لنعرّف المجموعة $W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)$ بأنها مجموعة الكلمات التي طولها m من الأبجدية A بحيث أن الحرف a_i يظهر فيها k_i مرة ، من أجل كل i من $[n]$. أوجد عدد عناصر المجموعة $W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)$.

3- من أجل كل تبديل $\pi \in S_m$ ، لنعرّف المجموعة

$$\pi * W_m^{k_1, \dots, k_n}(A) := \{w_{\pi_1} w_{\pi_2} \cdots w_{\pi_m} \mid w_1 w_2 \cdots w_m \in W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)\}$$

من أجل كل $w_1 w_2 \cdots w_m \in W_m^{k_1, \dots, k_n}(A)$ لنعرّف المجموعة

$$S_m * w_1 w_2 \cdots w_m := \{w_{\pi_1} w_{\pi_2} \cdots w_{\pi_m} \mid \pi \in S_m\}$$

أوجد عدد عناصر كل من المجموعتين

$$S_m * w_1 w_2 \cdots w_m, \pi * W_m^{k_1, \dots, k_n}(A).$$

تمرين .40

أوجد عدد عناصر المجموعة

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / x + y + z = 20, x \geq 3, y \geq 2, z \geq 5\}$$

مبرهنة .41

لتكن A_1, A_2, \dots, A_n مجموعات منتهية ، عندئذٍ فإن

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ &+ (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

بعبارة أخرى

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}|$$

نتيجة .42

لتكن A_1, A_2, \dots, A_n مجموعات جزئية من المجموعة المنتهية X ، عندئذٍ فإن

$$\begin{aligned} |\cap_{i=1}^n A_i^c| &= |(\cup_{i=1}^n A_i)^c| = |X| - |\cup_{i=1}^n A_i| \\ &= |X| - \left\{ \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}| \right\} \\ &= |X| + \left\{ \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}| \right\} \end{aligned}$$

التمرينين التاليين تطبيق مباشرة للنتيجة السابقة.

43. تمرين

الهدف من هذا التمرين إيجاد عدد التطبيقات الغامرة $f : [m] \rightarrow [n]$ ، بفرض $m \geq n$.
 1- لتكن $F([m], [n])$ مجموعة كل التتابع من $[m]$ إلى $[n]$. ولنعرف المجموعات التالية

$$\forall i \in [n] , A_i := \{f \in F([m], [n]) / f^{-1}(i) = \emptyset\}$$

أوجد عدد عناصر كل من المجموعات التالية

$$F([m], [n]) , A_i , A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r} , \forall 1 \leq r \leq n , \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$$

2- أوجد عدد عناصر المجموعة $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$ ، ثم استنتج عدد التتابع الغامرة $f : [m] \rightarrow [n]$.

44. تمرين

أوجد عدد التباديل في S_n التي لا تملك نقاط ثابتة، أي عدد عناصر المجموعة

$$X := \{\pi \in S_n / \pi(i) \neq i , \forall i \in [n]\}$$

توجيه :

لنعرف المجموعات التالية

$$\forall i \in [n] , A_i := \{\pi \in S_n / \pi(i) = i\}$$

عندئذٍ من الواضح أن

$$X := A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c.$$

الفصل الثاني : الاستقراء

1- البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي

45. مبرهنة

لتكن $p(n)$ قضية تتعلق بالعدد $n \in \mathbb{N}$ ، و لنفرض أن القضية $p(0)$ محققة ، و لنفرض أنه كلما كانت القضية $p(n)$ محققة فإن القضية $p(n+1)$ ستكون محققة أيضاً . عندئذٍ فإن القضية $p(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$.

البرهان

لنفرض جدلاً وجود $m \in \mathbb{N}$ من أجله القضية $p(m)$ غير محققة ، عندئذٍ فالمجموعة $A := \{k \in \mathbb{N} / p(k) \text{ غير محققة}\}$ غير خالية و منه يوجد عدد صحيح وحيد موجب r بحيث $r = \min A$ ، و منه $r-1 \notin A$ وبالتالي $p(r-1)$ محققة ، و حسب الفرض الاستقرائي فإن $p(r)$ محققة ، و هذا يناقض كون $r \in A$ بالفرض الجدلي خاطئ ، وبالتالي فإن القضية $p(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$.

46. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن مجموع أول n عدد فردي هو n^2 .

47. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن عدد المسارات من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

48. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي المبرهنة الأساسية في الحساب ، و التي تنص على أن كل عدد صحيح موجب n يكتب بشكل وحيد بالشكل

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

حيث $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ أعداد أولية ، و k_1, k_2, \dots, k_m أعداد صحيحة موجبة .

49. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أنه من أجل كل عدد صحيح موجب n فإن

$$\sum_{\{a_1, \dots, a_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} = n$$

حيث المجموع يتم على كل المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$.

50. تمرين

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي، أنه من أجل كل عدد صحيح موجب n فإن مشتق التابع $f(x) = x^n$ هو nx^{n-1} .

51. تمرين

أوجد الخطأ في البرهان التالي باستخدام الاستقراء الرياضي للقضية التالية :

♦ من أجل كل عدد صحيح موجب n ، إذا كان العددان الصحيحان الموجبان x, y يحققان $\max\{x, y\} = n$ فإن $x = y = n$. ♦

البرهان : من أجل $n = 1$ فالقضية صحيحة وضوحاً. لنفرض أن $n > 1$ وأن القضية صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب k أصغر تماماً من n ، ولنبرهن صحتها من أجل n ، لنفرض أن $\max\{x, y\} = n$ عندئذٍ فإن $\max\{x-1, y-1\} = n-1$ ومنه حسب الفرض الاستقرائي $x-1 = y-1 = n-1$ ومنه $x = y = n$.

52. تمرين

أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي :

♦ مبرهنة : كل الأحصنة لها نفس اللون. ♦

البرهان : لتكن القضية التالية

$p(n)$: كل الأحصنة في مجموعة مكونة من n حصان لها نفس اللون

لنبرهن بالاستقراء الرياضي أن هذه القضية صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$. من أجل $n = 1$ فالقضية $p(1)$ صحيحة وضوحاً. لنفرض أن القضية $p(k)$ صحيحة ، و لنبرهن أن القضية $p(k+1)$ صحيحة. لتكن $\{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ مجموعة مكونة من $k+1$ حصاناً. عندئذٍ فحسب الفرض الاستقرائي مجموعة الأحصنة $\{a_2, \dots, a_{k+1}\}$ لها نفس اللون ، وكذلك مجموعة الأحصنة $\{a_1, \dots, a_k\}$ لها نفس اللون ، ومنه مجموعة الأحصنة $\{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ لها نفس اللون ، فالقضية $p(k+1)$ صحيحة.

تمرين 53.

أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي:
◆ مبرهنة : ليكن a عدد حقيقي مغاير للصفر عندئذٍ فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $a^n = 1$.
البرهان : من أجل $n = 0$ فالقضية صحيحة وضوحاً. لنفرض صحة القضية من أجل كل $n \geq k$ ولنبرهن أن $a^{n+1} = 1$. لدينا

$$a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

تمرين 54.

أوجد الخطأ في برهان المبرهنة التالية باستخدام الاستقراء الرياضي:
◆ مبرهنة : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $5n = 0$.
البرهان : من أجل $n = 0$ فالقضية صحيحة وضوحاً. لنفرض صحة القضية من أجل كل عدد صحيح k بحيث $0 \leq k < n$ ، ولنبرهن أن $5n = 0$. ليكن i, j عددين صحيحين غير سالبين يحققان $i + j = n$ عندئذٍ من الفرض الاستقرائي نجد
 $5n = 5(i + j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

2- العلاقات الاستقرائية

لتكن $(a_n)_{n \geq 0}$ متتالية من الأعداد الحقيقية ، إن أي علاقة بين الحد a_n والحدود التي قبلها a_0, a_1, \dots, a_{n-1} تدعى علاقة استقرائية.

مثال:

$$a_n = 7a_{n-1} - 3n^2 a_{n-2}$$

هي علاقة استقرائية للمتتالية a_n .

مثال :

يمكن تعريف $n!$ بالعلاقات الاستقرائية التالية

$$b_0 = 1 , \quad b_n = nb_{n-1} , \quad \forall n \geq 1 .$$

ف نجد أن

$$b_n = n! , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

55. تمرين

أوجد المتتالية $(a_n)_{n \geq 0}$ التي تحقق الشروط التالية:

$$a_0 = 4 , \quad a_1 = -1 , \quad a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

الحل
ليكن

$$F(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

عندئذٍ

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n \geq 2} a_n x^n$$

$$xF(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n = a_0 x + \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^n$$

$$x^2 F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+2} = \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n$$

و منه

$$\begin{aligned}
 F(x) - (a_0 + a_1x) &= \sum_{n \geq 2} a_n x^n \\
 &= \sum_{n \geq 2} (-a_{n-1} + 2a_{n-2}) x^n \\
 &= - \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n \\
 &= - (xF(x) - a_0x) + 2x^2F(x)
 \end{aligned}$$

نعوض $a_0 = 4$, $a_1 = -1$ فنجد

$$F(x) - (4 - x) = - (xF(x) - 4x) + 2x^2F(x)$$

ومنه

$$\begin{aligned}
 F(x)(1 + x - 2x^2) &= 3x + 4 \\
 F(x) &= \frac{3x + 4}{1 + x - 2x^2} = \frac{3x + 4}{(1 + 2x)(1 - x)} = \frac{\frac{7}{3}}{1 - x} + \frac{\frac{5}{3}}{1 + 2x} \\
 F(x) &= \frac{7}{3} \sum_{n \geq 0} x^n + \frac{5}{3} \sum_{n \geq 0} (-2x)^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3}(-2)^n \right) x^n
 \end{aligned}$$

لكن

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

إذاً من أجل كل $n \geq 0$ فإن

$$a_n = \frac{7}{3} + \frac{5}{3}(-2)^n$$

مستقيّات في المستوي (Jacob Steiner 1883)

عند رسم ثلاث مستقيّات في المستوي، فإن المستوي سينقسم إلى عدة مناطق حسب أوضاع المستقيّات، فإذا كانت المستقيّات متوازية تماماً (غير منطبقة) فإنها ستقسم المستوي إلى 4 مناطق. بينما إذا كان اثنان منها متوازيان فقط، فإنها ستقسم المستوي إلى 6 مناطق. وإذا كانت المستقيّات الثلاث متقاطعة مثنى مثنى (لا يوجد أي اثنين متوازيين) عندئذٍ فإن عدد المناطق 7 ، وهو العدد الأعظمي للمناطق الممكن تشكيلها بثلاث مستقيّات في المستوي.

و بشكل عام، ما هو العدد الأعظمي للمناطق الناتجة عن رسم n مستقيم في المستوي ؟

سنقوم بحل هذه المسألة باستخدام العلاقات الاستقرائية.

لنفرض أن a_n هو العدد الأعظمي للمناطق الناتجة عن رسم n مستقيم في المستوي. عندئذٍ فإن

$$a_0 = 1 , a_1 = 2 , a_2 = 4 , a_3 = 7, \dots$$

كما أن

$$a_n = a_{n-1} + n$$

و منه

$$a_n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots = a_0 + 1 + 2 + \dots + n$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \sum_{i=1}^n i = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} .$$

أي أنه عند رسم n مستقيم في المستوي، فإن العدد الأعظمي للمناطق الممكن الحصول عليها هو $\frac{n^2 + n + 2}{2}$.

ما هو عدد الكلمات $W_n(\{a, b, c\}) \ni w := w_1 w_2 \cdots w_n$ التي طولها n من الأبجدية $A := \{a, b, c\}$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات .

الحل

لتكن X_n مجموعة الكلمات التي طولها n من الأبجدية $A := \{a, b, c\}$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات ، و لنفرض أن $|X_n| := a_n$.

لتكن Y_n مجموعة الكلمات $b w := w_1 w_2 \cdots w_{n-1}$ ، $W_n(\{a, b, c\}) \ni w$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات .

لتكن Z_n مجموعة الكلمات $c w := w_1 w_2 \cdots w_{n-1}$ ، $W_n(\{a, b, c\}) \ni w$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد فردي من المرات .

و إذا رمزنا X'_n مجموعة الكلمات التي طولها n من الأبجدية $A := \{a, b, c\}$ ، بحيث أن الحرف a مكرر فيها عدد زوجي من المرات ، عندئذٍ فإن

$$|X_n| + |X'_n| = |W_n(A)| = 3^n , \quad |Y_n| = |Z_n| = a_{n-1}$$

و منه

$$\begin{aligned} a_n &= |X_n| = |Y_n| + |Z_n| + |X'_{n-1}| \\ &= a_{n-1} + a_{n-1} + (3^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= a_{n-1} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

إدأً

$$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

و منه

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots 3 + a_1 \\ &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots 3 + 1 \\ &= \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

57. تمرين

ما هو عدد الأعلام المقسمة أفقياً إلى n قسم ، و التي يمكن تشكيلها باستخدام 3 ألوان مختلفة ، وذلك في الحالتين التاليتين

1- لا يسمح بتواجد نفس اللون في قسمين متجاورين.

2- الشرط السابق مضافاً إليه أن القسمين الأفقيين الأول والأخير من لونين مختلفين .

الحل :

1- ليكن a_n هو العدد المطلوب، بما أنه هناك ثلاث خيارات لتلوين القسم الأفقي الأول ، و خيارين لتلوين القسم الأفقي الثاني ، و خيارين لتلوين القسم الأفقي الثالث ، وهكذا ... ، إذاً

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

2- ليكن b_n هو العدد المطلوب، عندئذٍ فإن

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - l_n$$

حيث l_n هو عدد الأعلام المكونة من n قسم أفقي ملونة بثلاث ألوان (كل قسمين متجاورين من لونين مختلفين) ، بحيث أن القسمين الأول والأخير من نفس اللون .
و منه

$$l_n = b_{n-1}$$

وبالتالي

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - b_{n-1}.$$

ليكن

$$F(x) := \sum_{n \geq 2} b_n x^n$$

عندئذٍ

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n \geq 2} 3 \cdot 2^{n-1} x^n - \sum_{n \geq 2} b_{n-1} x^n \\
&= 3x \cdot \sum_{n \geq 2} (2x)^{n-1} - x \sum_{n \geq 3} b_{n-1} x^{n-1} \\
&= 3x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) - x \cdot \sum_{n \geq 2} b_n x^n \\
&= \frac{6x^2}{1-2x} - xF(x)
\end{aligned}$$

ومنه

$$F(x) = \frac{6x^2}{(1+x)(1-2x)}$$

نقسم البسط على المقام فنجد

$$F(x) = -3 + \frac{2}{1+x} + \frac{1}{1-2x}$$

و من ثم

$$\begin{aligned}
F(x) &= -3 + 2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n + \sum_{n \geq 0} 2^n x^n \\
&= \sum_{n \geq 2} (2 \cdot (-1)^n + 2^n) x^n \\
&= \sum_{n \geq 2} b_n x^n
\end{aligned}$$

و منه

$$b_n = 2 \cdot (-1)^n + 2^n, \quad \forall n \geq 2.$$

إذاً عدد الأعلام المؤلفة من n قسم أفقي و الملونة بثلاث ألوان، بحيث أن القسمين الأول والأخير من لونين مختلفين هو $2 \cdot (-1)^n + 2^n, \quad \forall n \geq 2$.

مسألة برج هانوي (Eduard Lucas 1883)

ليكن لدينا ثلاث عواميد، و برج مؤلف من n قرص موضوعة بشكل متناقص (من الأسفل إلى الأعلى) على العامود الأول ، و المطلوب نقل هذا البرج (قرص بعد قرص) من العامود الأول إلى العامود الثالث (باستخدام العامود الثاني) و ذلك بتحريك كل قرص بشرط أن القرص الكبير دائماً تحت القرص الأصغر منه. والمطلوب:

- 1- هل يمكن دائماً نقل برج الأقراص من العמוד الأول إلى العמוד الثالث، وذلك مهما كان العدد الطبيعي n .
 - 2- ما هو عدد الخطوات (الحركات) اللازمة لنقل البرج المكون من n قرص، من العמוד الأول إلى العמוד الثالث .
- الحل**

1- لنبرهن ذلك بالاستقراء، الرياضي على n . من أجل $n = 1$ العملية تتم بحركة واحدة. لنفرض أنه يمكن نقل $n - 1$ قرص، و لنبرهن أنه يمكن نقل n قرص. حسب الفرض الاستقرائي فإنه يمكننا نقل أول $n - 1$ قرص إلى العמוד الثاني، ومن ثم ننقل القرص الأخير (أكبر قرص) إلى العמוד الأول ، و من ثم ننقل البرج المكون من $n - 1$ قرص (حسب الفرض الاستقرائي) من العמוד الثاني إلى الثالث ، و بذلك تتم العملية.

2- لنفرض أن a_n هو عدد الخطوات اللازمة لنقل برج مكون من n قرص من العמוד الأول إلى الثالث، عندئذٍ فإجراء هذه العملية ننقل أول $n - 1$ قرص إلى العמוד الثاني وذلك يحتاج a_{n-1} خطوة، ومن ثم ننقل القرص الأخير (أكبر قرص) إلى العמוד الثالث بخطوة واحدة، و أخيراً نقوم بنقل البرج المكون من $n - 1$ قرص من العמוד الثاني إلى الثالث، وذلك يحتاج a_{n-1} خطوة، ومنه

$$a_n = 1 + 2a_{n-1}.$$

و لنوجد a_n انطلاقاً من العلاقة الاستقرائية السابقة.

لدينا

$$a_n + 1 = 2a_{n-1} + 2 = 2.(a_{n-1} + 1)$$

لنفرض أن

$$b_n := a_n + 1$$

ف نجد

$$b_n = 2b_{n-1} = 2^2b_{n-2} = 2^3b_{n-3} = \dots = 2^{n-1}b_1 = 2^n$$

ومنه

$$a_n = 2^n - 1$$

أي أن عدد الخطوات اللازمة لنقل البرج المكون من n قرص، من العمود الأول إلى العمود الثالث هو $2^n - 1$.

فمثلاً لنقل 10 أقراص نحتاج $2^{10} - 1$ خطوة (أكثر من 1000 خطوة) . و لنقل 30 قرص نحتاج $2^{30} - 1$ أي لأكثر من 1000^3 خطوة ، و إذا فرضنا أن شخصاً ما يحتاج ثانية واحدة لإجراء كل خطوة، فبحساب بسيط نجد أنه سيحتاج إلى أكثر من ثلاثين سنة من نقل الأقراص (مع العمل ليل نهار دون توقف) ليتمكن من نقل برج مكون من 30 قرص من العمود الأول إلى الثالث.

الفصل الثالث : العلاقات

1- العلاقة بين مجموعتين

58. تعريف

نعرّف العلاقة بين مجموعتين غير خاليتين X, Y بأنها أي ثلاثية من الشكل (X, Y, A) حيث $\emptyset \neq A \subset X \times Y$ ، وسنرمز لهذه العلاقة بالرمز R_A أو R اختصاراً ، وسندعو X منطلق العلاقة ، Y مستقرها ، A بيانها (أو قاعدة ربطها) . سنقول إن العنصر $x \in X$ يرتبط بالعنصر $y \in Y$ (وسنرمز ذلك $x R_A y$) إذا كان $(x, y) \in A$. وسنمثل ذلك في المخطط السهمي للعلاقة بإرسال سهم موجه من العنصر x إلى العنصر y .

59. مثال

لتكن العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ حيث $X := \{1, 2, 3\}$ ، $Y := \{a, b\}$

$$A := \{(1, b), (3, a), (3, b)\}$$

أي أن

$$1 R b \quad , \quad 3 R a \quad , \quad 3 R b$$

حالات خاصة :

لتكن العلاقة $R = (X, Y, A)$

1- إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط التالي :

من أجل كل $x \in X$ فإنه يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ يحقق $x R y$ ، فإننا سنقول إن العلاقة R تحقق شرط التابع. وهذا يكافئ أنه في المخطط السهمي للعلاقة كل عنصر في المنطلق X يخرج منه سهم واحد فقط..

2- إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط التالي :

من أجل كل $Y \ni y$ فإنه يوجد عنصر (واحد على الأقل) $X \ni x$ يحقق $x R y$ ، فإننا سنقول إن العلاقة R تحقق شرط الغمر. وهذا يكافئ أنه في المخطط السهمي للعلاقة كل عنصر في المستقر Y يصله سهم واحد على الأقل.

3- إذا كانت العلاقة R تحقق الشرط التالي:

من أجل كل $X \ni x, x'$

$x R y$, $x' R y$ فإن $x = x'$ ، فإننا سنقول إن العلاقة R تحقق شرط التباين. وهذا يكافئ أنه في المخطط السهمي للعلاقة كل عنصر في المستقر Y يصله سهم واحد على الأكثر.

60. مثال

العلاقة المعطاة في المثال ٢ لا تحقق شرط التابع ولا تحقق شرط التباين لكن تحقق شرط الغمر.

61. ملاحظة

1- إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً، وإذا رمزنا لهذا التابع بالرمز f_A ، فإن $f_A = R_A$ كما أن

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y ; x R_A y$$

حيث

$$A := \{(x, f(x)) / x \in X\}$$

و في حال $X = Y = R$ فإن المجموعة A هي المنحنى البياني للتابع f_A .

كما أن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع)

2- إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع و شرط التباين، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً متبائناً، وفي هذه الحالة فإن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع) ، كما أن كل عنصر في المستقر يصله سهم على الأكثر (شرط التباين) .

3- إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع و شرط الغمر، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً غامراً، وفي هذه الحالة فإن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع) ، كما أن كل عنصر في المستقر يصله سهم على الأقل (شرط الغمر) .

4- إذا كانت العلاقة $R_A = (X, Y, A)$ تحقق شرط التابع و شرط التباين و شرط الغمر، فإننا سندعو هذه العلاقة تابعاً تقابلاً، وفي هذه الحالة فإن كل عنصر في المنطلق يخرج منه سهم وحيد (شرط التابع) ، كما أن كل عنصر في المستقر يصله سهم وحيد من المنطلق (شرطي الغمر والتباين بأن واحد) .

2- صفات العلاقة على مجموعة

62. تعريف

لتكن $R = (X, X, A)$ علاقة معرفة على المجموعة X منطلق و مستقر العلاقة ، لرمز هذه العلاقة $R = (X, A)$ اختصاراً ، وليكن $X^2 \supseteq A$ هو بيان العلاقة R ، سندعو العلاقة R

1- انعكاسية إذا كان

$$\forall x \in X : x R x$$

2- تناظرية إذا كان

$$\forall x, y \in X : (x R y \implies y R x)$$

1- متعدية إذا كان

$$\forall x \in X : (x R y \wedge y R z \implies x R z)$$

1- تخالفية إذا كان

$$\forall x, y \in X : (x R y \wedge y R x \implies x = y)$$

63. تمرين

لتكن X مجموعة غير خالية عدد عناصرها n

- 1- أوجد عدد العلاقات الممكن تعريفها على المجموعة X .
- 2- أوجد عدد العلاقات الانعكاسية الممكن تعريفها على المجموعة X .
- 3- أوجد عدد العلاقات التناظرية الممكن تعريفها على المجموعة X .

64. تعريف

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة X

- 1- نقول عن العلاقة R إنها علاقة تكافؤ على المجموعة X إذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتعدية و تناظرية .
- 2- نقول عن العلاقة R إنها علاقة ترتيب على المجموعة X إذا كانت هذه العلاقة انعكاسية ومتعدية و مخالفية .

لتكن (X, R) مجموعة مرتبة، نقول إن العنصرين x, y قابلان للمقارنة في X إذا كان xRy أو yRx . نقول إن R هي علاقة ترتيب كلي على X إذا كان كل عنصران من X قابلان للمقارنة وفق تلك العلاقة .

65. تعريف

لتكن $R_A = (X, A)$ ، $R_B = (X, B)$ علاقيتين معرفتين على المجموعة X ،
نقول إن العلاقة R_A أدق من العلاقة R_B إذا كان $A \subset B$.

66. تمرين

لتكن X مجموعة غير خالية، أثبت أن علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب على $\mathcal{P}(X)$. هل هي علاقة ترتيب كلي ؟

67. تمرين

لتكن X مجموعة المثلثات في المستوي ، لنزود المجموعة X بالعلاقيتين التاليتين R, R' ، حيث نقول عن مثلثين أنهما مرتبطان بالعلاقة R إذا كانا متطابقين، ونقول عنهما أنهما مرتبطان بالعلاقة R' إذا كانا متشابهين، أثبت أن R, R' علاقتي تكافؤ على X . أي العلاقات أدق ؟

68. تمرين

لنزود المجموعة $X \neq \emptyset$ بالعلاقيتين $R_1 = (X, A_1)$ ، $R_2 = (X, A_2)$ حيث

$$A_1 := \{(x, x) \mid x \in X\} , \quad A_2 := \{(x, y) \mid x, y \in X\}$$

$$\forall x, y \in X , \quad x R_1 y \Leftrightarrow (x, y) \in A_1 \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in X , \quad x R_2 y \Leftrightarrow (x, y) \in A_2 \Leftrightarrow x, y \in X$$

والمطلوب

- 1- أثبت أن R_1 علاقة تكافؤ وترتيب بآن واحد، هل توجد علاقة أخرى يمكن تعريفها على X بحيث تكون علاقة تكافؤ وترتيب بآن واحد.
- 2- هل R_2 علاقة تكافؤ؟ وهل هي علاقة ترتيب؟
- 3- تحقق أنه من أجل أي علاقة R معرفة على المجموعة X فإن R_1 أدق من R ، كما أن R أدق من R_2 .

69. تمرين

لتكن المجموعة $X \ni \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ و لنزود المجموعة X بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall x, y \in X , \quad x R y \Leftrightarrow x \leq y$$

أثبت أن R علاقة ترتيب على X .

70. تمرين

لتكن Y مجموعة مزودة بعلاقة الترتيب R ، و لتكن X أي مجموعة غير خالية، و لنزود المجموعة $F(X, Y)$ (مجموعة التتابع من X إلى Y) بالعلاقة R' المعرفة كما يلي

أثبت أن R' علاقة ترتيب على $F(X, Y)$.

71. تمرين

1- لنزود مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : \quad x R y \Leftrightarrow x \mid y$$

حيث $x \mid y$ تعني أن العدد x يقسم العدد y . أثبت أن R علاقة ترتيب على \mathbb{N} . هل هي علاقة ترتيب كلي؟

2- لنزود مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} بالعلاقة السابقة R ، هل R علاقة ترتيب على \mathbb{Z} ؟

72. تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية مزودة بعلاقة تكافؤ R ، ولنعرف المجموعات التالية

$$\forall x \in X , [x]_R = \{y \in X / x R y\} \subset X$$

سندعو $[x]_R$ صف تكافؤ العنصر x بالنسبة للعلاقة R ، وسنرمزه اختصاراً $[x]$.

سنرمز X/R لمجموعة صفوف تكافؤ عناصر X ، أي أن

$$X/R = \{[x] / x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

73. مثال

$$X = \{a, b, c\}$$

$$R = (X, A)$$

$$A = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (b, c)\}$$

$$X/R = \{ \{a, b\}, \{c\} \}$$

74. تمرين

ليكن $\mathbb{N}^* \ni n$ ، و لنزود المجموعة X بالعلاقة التالية

$$\forall x, y \in X , x R y \iff x \equiv y \pmod{n} \iff x - y \in n\mathbb{Z}$$

أثبت أن R هي علاقة تكافؤ على \mathbb{Z} .

75. تمرين

لنزود \mathbb{N}^2 بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, (a, b) R (c, d) \iff a + d = b + c \iff a - b = c - d$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ¹ .

¹

تستخدم صفوف تكافؤ العلاقة السابقة لبناء \mathbb{Z} انطلاقاً من \mathbb{N} فيتم تعريف العدد الصحيح السالب

$-n$ من أجل كل $\mathbb{N} \ni n$ بأنه $-n := [(0, n)]$

76. تمرين

لنرود $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ بالعلاقة R المعرفة كما يلي

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, (a, b) R (c, d) \iff ad = bc \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ².

77. تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية، سندعو تجزئة للمجموعة X أي جماعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X والمنفصلة مثنى مثنى والتي اجتماعها يساوي X .

أي أنه تشكل أسرة المجموعات $\{A_1, \dots, A_n\}$ تجزئة للمجموعة X إذا تحققت الشروط التالية:

$$\forall i \in [n], A_i \neq \emptyset \quad -1$$

$$\forall i, j \in [n]; i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad -2$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X \quad -3$$

78. مبرهنة

لتكن X مجموعة غير خالية، عندئذٍ
-1 إذا كانت X مزودة بعلاقة تكافؤ R ، فإن

$$X/R = \{[x] \mid x \in X\}$$

تشكل تجزئة للمجموعة X .

-2 من أجل كل تجزئة

$$\{A_i \mid i \in I\}$$

للمجموعة X فإنه توجد علاقة وحيدة R تحقق

$$X/R = \{A_i \mid i \in I\}$$

2

تستخدم صفوف تكافؤ العلاقة السابقة لبناء \mathbb{Q} انطلاقاً من \mathbb{Z} فيتم تعريف العدد العادي $\frac{m}{n}$ من

$$\text{أجل كل } \frac{m}{n} := [(m, n)] \text{ بأنه } \mathbb{Z} \ni m, \mathbb{Z}^* \ni n$$

الإثبات

1- نتحقق من شروط التجزئة

١ - من أجل كل $x \in X$ فإن $x \in [x]$ وبالتالي $[x] \neq \emptyset$.

٢ - لنبرهن أن

$$[x] \neq [y] \implies [x] \cap [y] = \emptyset$$

لنفرض جديلاً أن $[x] \neq [y]$ وأن $[x] \cap [y] \ni z$ وبالتالي

$$z \in [x], z \in [y] \implies xRz, zRy \implies xRy \implies [x] = [y]$$

تناقض .

٣ - لنبرهن أن

$$\bigcup_{x \in X} [x] = X$$

من الواضح أن

$$\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$$

وبما أنه من أجل كل $x \in X$ فإن $x \in [x]$ أي أن $[x] \ni x$ و منه

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$$

وبالتالي

$$\bigcup_{x \in X} [x] = X$$

إذاً من تحقق الشروط الثلاث السابقة نجد أن X/R تشكل تجزئة للمجموعة X .

2- لتكن $\{A_i / i \in I\}$ تجزئة للمجموعة X ولنعرف العلاقة R على X كما يلي :

$$\forall x, y \in X, \quad xRy \iff \exists i \in I : x, y \in A_i$$

عندئذٍ فإن يمكن بسهولة التحقق من أن R علاقة تكافؤ.

من أجل كل $x, y \in X$ بحيث xRy فإنه يوجد $i \in I$ يحقق $x, y \in A_i$ و
بالتالي $[x] = [y] = A_i$ أي أن

$$X/R = \{[x] \mid x \in X\} = \{A_i \mid i \in I\}$$

■

الفصل الرابع : تجزئات مجموعة

79. تعريف

لتكن X مجموعة غير خالية، سندعو تجزئة للمجموعة X أي جماعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X والمنفصلة مثنى مثنى والتي اجتماعها يساوي X .

أي أنه تشكل أسرة المجموعات $\{A_1, \dots, A_n\}$ تجزئة للمجموعة X إذا تحققت الشروط التالية:

$$\forall i \in [n], A_i \neq \emptyset \quad -1$$

$$\forall i, j \in [n]; i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad -2$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X \quad -3$$

مثال

إن $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}\}$ تجزئة للمجموعة $[5] := \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 إن تجزئات المجموعة $[3]$ هي أسر المجموعات التالية :
 $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
 وبالتالي فإن عدد تجزئات المجموعة $[3]$ هو 5 .

80. تمرين

1- بكم طريقة يمكن توزيع 52 ورقة شدة على أربع لاعبين بالتساوي (أي كل لاعب 13 ورقة).

2- بكم طريقة يمكن توزيع 52 كرة متميزة على أربع صناديق متميزة و بالتساوي (لا أهمية للترتيب أو الإعادة في توزيع الكرات).

3- ما هو عدد تجزئات المجموعة $[52]$ والمؤلفة من أربع مجموعات لها نفس عدد العناصر.

الحل

من أجل الطلبين الأول والثاني، يكون عدد الطرق المطلوب هو

$$\binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} = \frac{52!}{(13)^4}$$

والآن لنبحث عن عدد تجزئات المجموعة 52 والمؤلفة من أربع مجموعات لها نفس عدد العناصر.
لنعرف المجموعتين

$$X := \{(A_1, A_2, A_3, A_4) \mid |A_i| = 13; \forall i \in [4], \sqcup A_i = [52]\}$$

و

$$Y := \{ \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \mid |A_i| = 13; \forall i \in [4], \sqcup A_i = [52] \}$$

فإننا بالاعتماد على الطالبين السابقين للمسألة نجد

$$|X| = \frac{52!}{(13)^4}$$

و بالتالي فإن

$$|Y| = \frac{|X|}{4!} = \frac{52!}{(13)^4}$$

.81

تمرين

بكم طريقة يمكن تجزئة المجموعة $[mn]$ إلى $[m]$ مجموعة، كل منها يحوي $[n]$ عنصر.
لنعرف المجموعتين

$$X := \{(A_1, A_2, \dots, A_m) \mid |A_i| = n; \forall i \in [m], \sqcup A_i = [mn]\}$$

و

$$Y := \{\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \mid |A_i| = n; \forall i \in [m], \sqcup A_i = [mn]\}$$

من أجل كل $X \ni (A_1, A_2, \dots, A_m), (B_1, B_2, \dots, B_m)$ فإن

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) = (B_1, B_2, \dots, B_m) \iff \exists \pi \in S_m : A_i = B_{\pi_i}, \forall i \in [m]$$

$$\iff \{A_1, A_2, \dots, A_m\} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

ومنه

$$|Y| = \frac{|X|}{m!}$$

كما أن

$$|X| = \binom{mn}{n} \binom{mn-n}{n} \binom{mn-2n}{n} \cdots \binom{mn-(m-1)n}{n} = \frac{(mn)!}{(n!)^m}$$

و بالتالي فإن

$$|Y| = \frac{|X|}{m!} = \frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$$

تمارين .82

بكم طريقة يمكن توزيع $2m$ كرة متمايزة على m صندوق متمايز، بحيث أن كل صندوق يحوي m كرة .

الجواب

$$\frac{(2m)!}{(2)^m}$$

تمارين .83

بكم طريقة يمكن توزيع nm كرة متمايزة على m صندوق متمايز، بحيث أن كل صندوق يحوي n كرة .

الجواب

$$\frac{(nm)!}{(n!)^m}$$

تمارين .84

بكم طريقة يمكن تشكيل مباريات لكرة القدم بين $2n$ فريق بحيث أن كل فريق يلعب مباراة واحدة فقط .

(James Stirling 1692 – 1770)

عدد ستيرلينغ من النوع الثاني

من أجل كل $1 \leq k \leq n$ ، نعرّف عدد ستيرلينغ من النوع الثاني $S(n, k)$ بأنه عدد تجزئات المجموعة $[n]$ والمؤلفة من k مجموعة، أي أن

$$S(n, k) = \text{card}\{\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \mathcal{P}([n]) \mid \sqcup_{i=1}^k A_i = [n], A_i \neq \emptyset; \forall i \in [k]\}$$

مثال:

لحساب $S(4, 2)$ يجب إيجاد كل تجزئات المجموعة $[4]$ المكونة من مجموعتين ، فنجد أن

$$\begin{aligned} [4] &= \{1\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2\} \cup \{1, 3, 4\} = \{3\} \cup \{1, 2, 4\} = \{4\} \cup \{1, 2, 3\} \\ &= \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\}. \end{aligned}$$

و منه

$$S(4, 2) = 7$$

85. ملاحظة

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن

$$S(n, n) = S(n, 1) = 1$$

86. مبرهنة

من أجل كل $2 \leq k \leq n$ فإن

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k S(n-1, k)$$

87. تمرين

الهدف من هذا التمرين هو إثبات المبرهنة السابقة . ليكن $2 \leq k \leq n$ ، ولنعرّف المجموعات التالية

X هي مجموعة تجزئات $[n]$ من الشكل $\{A_1, \dots, A_k\}$.
 Y_j (حيث $j \in [k]$) هي مجموعة تجزئات $[n]$ من الشكل
 $\{A_1, \dots, A_{j-1}, A_j = \{n\}, A_{j+1}, \dots, A_k\}$.

Z هي مجموعة تجزئات $[n]$ من الشكل $\{A_1, \dots, A_k\}$ حيث $A_i \neq \{n\}, \forall i \in [k]$ والمطلوب:

1- ما هو عدد عناصر المجموعات

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_k$$

2- ما هو عدد عناصر المجموعة Z

استنتج $|X|$ بدلالة $|Z|, |Y_1|, \dots, |Y_k|$ ، و من ثم استنتج أن

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k S(n-1, k)$$

88. مبرنة

من أجل كل $n \geq 2$ فإن

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

الحل :

إن عدد تجزئات المجموعة $[n]$ إلى مجموعتين غير خاليتين يساوي نصف عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $[n]$ والمختلفة عن $\emptyset, [n]$ أي يساوي

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

89. تمرين

ليكن \mathbb{K} حقلاً متتهياً عدد عناصره q ، أوجد عدد عناصر المجموعة التالية $GL_n(\mathbb{K})$ وهي مجموعة المصفوفات القلوبة والمربعة من المرتبة n وبأمثال من الحقل \mathbb{K} (يوجد تقابل بين هذه المجموعة والمجموعة $GL(\mathbb{K}^n)$ مجموعة التطبيقات الخطية القلوبة على الفضاء الشعاعي \mathbb{K}^n).

90. تمرين

ليكن $\mathbb{N} \ni p, \mathbb{N}^* \ni n$ ، ولتكن $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ مجموعة الحدوديات بالمتحولات x_1, x_2, \dots, x_n وبأمثال من حقل الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، نعلم أن $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ هو فضاء شعاعي غير متتهى البعد على الحقل \mathbb{R} . نقول عن الحدودية $f(x_1, \dots, x_n)$ إنها متجانسة ومن الدرجة p إذا كان من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ فإن

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n)$$

لنرمز $\mathbb{R}_{H,p}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ مجموعة كل الحدوديات المتجانسة بالمتحولات x_1, x_2, \dots, x_n وبأمثال من حقل الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، أوجد بعد الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}_{H,p}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

91. تمرين

لتكن الأبجدية $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. أوجد عدد الكلمات من الطول $2n$ على الأبجدية A ، بحيث كل حرف من حروف الأبجدية مكرر فيها مرتين فقط.

92. تعريف

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، و لنفرض أن

$$n = \sum_{i=1}^k i \alpha_i$$

عندئذٍ كل تجزئة للمجموعة $[n]$ من الشكل

$$\{A_{i,j} \subset [n] / 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \alpha_i ; |A_{i,j}| = i, \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \alpha_i}} A_{i,j} = [n]\}$$

(حيث \sqcup يرمز للاجتماع المنفصل) تدعى تجزئة من النوع أو الطراز (type)

$$1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}$$

أي أنها تجزئات للمجموعة $[n]$ و مكونة من $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ مجموعة، بحيث منها : α_1 مجموعة قدرتها 1 و α_2 مجموعة قدرتها 2 وهكذا... حتى α_k مجموعة قدرتها k .

مثال

إن التجزئة التالية

$$\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\} \}$$

للمجموعة $[10]$ هي من الطراز $1^3 2^2 3^1$.

93. **مبرهنة**

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، ولنفرض أن

$$n = \sum_{i=1}^k i \alpha_i$$

عندئذٍ فإن عدد تجزئات المجموعة $[n]$ من الطراز

$$1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}$$

هو

$$\frac{n!}{(1!)^{\alpha_1} (\alpha_1)! (2!)^{\alpha_2} \alpha_2! \dots (k!)^{\alpha_k} \alpha_k!}$$

المراجع

1. *Rosen, 9ed Discrete Mathematics and its Applications Fifth Edition.*
2. *Graham, Knuth, Patashnik, Concrete Mathematics A Foundation for Computer Science Second Edition.*
3. *Graham, Knuth, Patashnik, Mathematiques concretes Fondations pour l'informatique, 2eme edition, traduction de Alain Denise.*
4. *Louis Comtet, Analyse combinatoire tome 1, annee 1970, PUF.*
5. *Stanley, Enumerative Combinatorics Volume 1 Cambridge Studies in Advanced Mathemat.*
6. طرائق العد للدكتور صلاح الأحمد، دار البشائر بدمشق.