

ملاحظات

Ex] Find D and R of  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

Sol:  $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$\therefore$  Domain  $\{x : x \neq \pm 1\}$

$y = \frac{2x^2}{x^2-1} \Rightarrow 2x^2 - yx^2 - y = 0 \Rightarrow y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

$y = x^2(y-2) \Rightarrow x^2 = \frac{y}{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{y-2}}$

1)  $y-2 > 0 \Rightarrow y > 2$

2)  $y \leq 0$   $\therefore$  Range  $\{y : y > 2\}$

H.W.: 1)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

2)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$  3)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Ex]  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$  find D and R?

$x \neq 0$   $\therefore$  Domain  $\{x : x \neq 0\}$

$y = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow y^2 x = x+1 \Rightarrow y^2 x - x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{y^2-1}$

$y^2-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq \pm 1 \Rightarrow y \neq \pm 1$

$\therefore$  Range  $\{y : y \neq \pm 1\}$

"بسمه تعالی"

\* Functions

\* الدالة : هي قاعدة التي تتأخر وتقبل كل قيمة من  $x$  ، والتي تكون مجموعة معينات تدعى بالمنطق "Domain" (قسم  $x$  ، غير الدالة) بقيمة معينة لهذه المجموعة تدعى بالمنطق "Range".  
 $f(x)$  ،  $f$  ،  $y$   
 ويخضع للدالة بعض الخصائص منها:

هناك عدة أنواع من الدوال منها:

\* الدالة الثابتة : Constant function

$f(x) = k$   $k = \text{constant}$

$f(x) = 3$

\* الدالة الهوية : Identity function

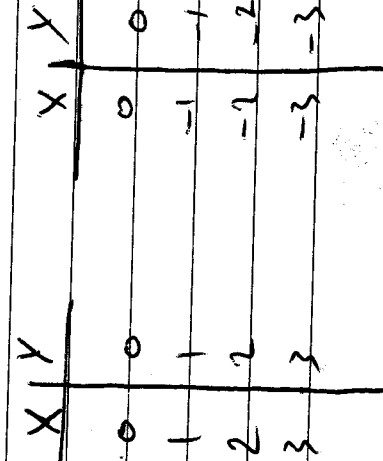
$f(x) = x$

Domain  $x = (-\infty, +\infty)$

Range  $y = (-\infty, +\infty)$

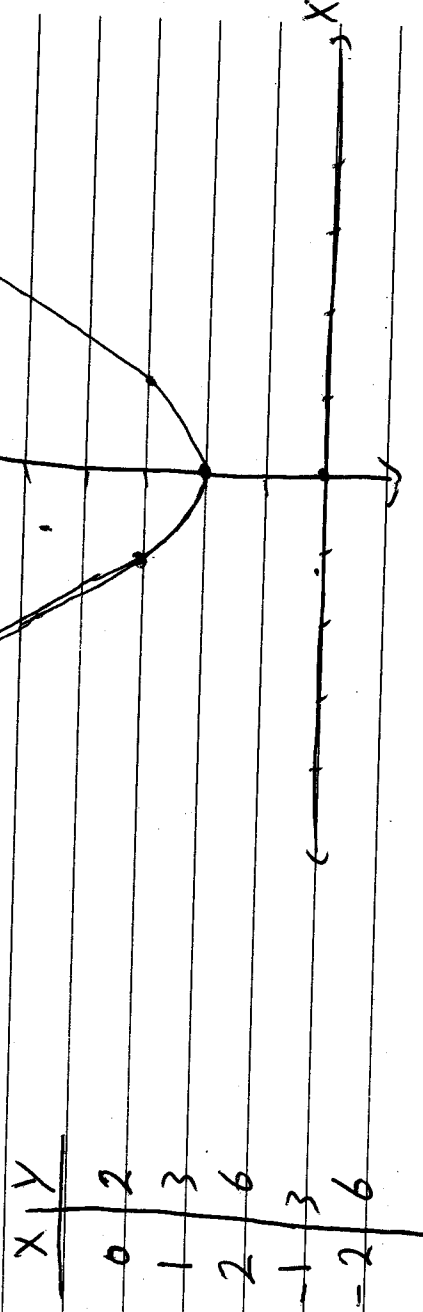
\* رسم الدالة : يمكن التمثيل للدالة على صورة الأول يمكن رسمها على صورة ثانية على شكل خط مستقيم داغ

Ex]  $f(x) = x$



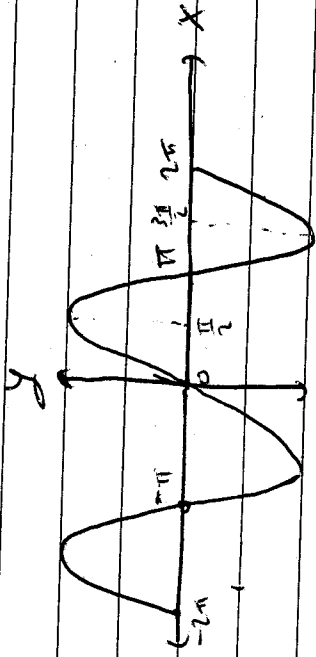
الأمثلة التالية في الدرس الثاني والسادس

Ex)  $y = x^2 + 2$



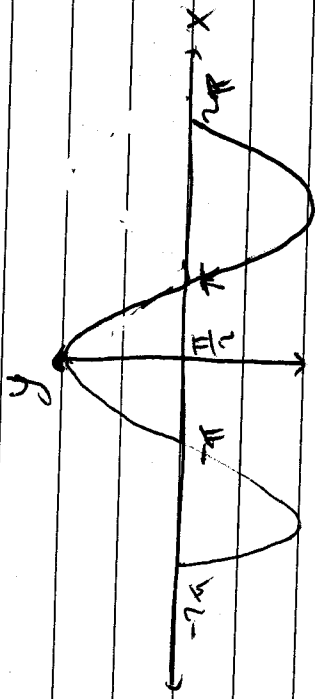
Ex) Sin wave

$f(x) = \sin(x)$



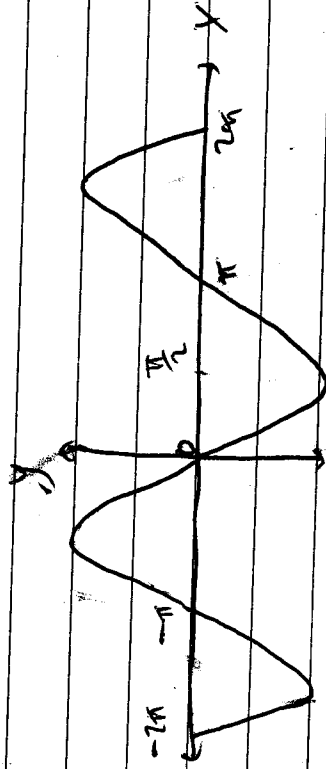
Ex) Cos wave

$f(x) = \cos(x)$



Ex) tan wave

$f(x) = \tan(x)$



Ex 1- Find the Domain and Range of  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

الأمثلة التالية معرفة على المجال الفعلي فقط  
المجال =  $x \neq 1$

Sol:  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\therefore$  Domain  $x = \{x: x \neq 1\}$  OR  $\{x: x \neq 1\}$

$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 1 \Rightarrow xy = 1+y$

$\therefore x = \frac{1+y}{y} \Rightarrow y \neq 0$

$\therefore$  Range  $y = \{y \neq 0\}$

Ex 1- Find D and R of  $f(x) = \sqrt{x-1}$

الأمثلة التالية معرفة على المجال الفعلي فقط  
فقط الموجب

Sol:  $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\therefore$  Domain  $\{x: x \geq 1\}$

$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 + 1$

$\therefore$  Range  $\{y: -\infty, +\infty\}$

## \* Limits أو النهايات

قوانين الحفظ

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k \quad \text{ex.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{ex.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Ex: Find the value of

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \frac{(3-3)^2}{3+3} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+1}{x^2} = \frac{(2)^3+1}{(2)^2} = \frac{9}{4} = 2.25$$

(2)

## \* Inverse function

مقلوب الدالة

الدالة  $f$  تكون مقلوب الدالة  $f^{-1}$  بـ  $f^{-1}(f(x)) = x$

Ex: Find the inverse function with prove of

$$\textcircled{1} y = 3x ?$$

$$\textcircled{14} y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{H.W.}$$

$$\text{Sol: } y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g\left(\frac{y}{3}\right) = x \Rightarrow g\left(\frac{3x}{3}\right) = x$$

$$\textcircled{2} y = \frac{2}{x-1} ?$$

$$\text{Sol: } yx - y = 2 \Rightarrow yx = 2 + y \Rightarrow x = \frac{2+y}{y}$$

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g\left(\frac{2+y}{y}\right) = g\left(\frac{2+\frac{2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}\right) \Rightarrow$$

$$g\left(\frac{\frac{2x-2+2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}\right) = g\left(\frac{2x}{2}\right) = x$$

$$\textcircled{3} y = \frac{3}{x^2+2}$$

$$\text{Sol: } yx^2 + y = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3-y}{y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3-y}{y}}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{3-y}{y}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{3-\frac{6}{x^2+2}}{\frac{3}{x^2+2}}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{3x^2+6-6}{x^2+2}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{3x^2}{x^2+2}}\right)$$

$$g\left(\sqrt{\frac{3x^2}{x^2+2}}\right) = x$$

## \* The Absolute Value Function : المطلق

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

\* Properties of absolute value :-

$$(1) |a| = |a| \quad (2) |a| = |a|$$

$$(3) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0 \quad (4) |a+b| \leq |a| + |b|$$

Ex :- Find the solution of :-

$$(1) |x-4| < 2 \quad ?$$

$$\text{Sol: } x-4 < 2 \Rightarrow x < 6$$

$$-(x-4) < 2 \xrightarrow{\times -1} x-4 > -2 \Rightarrow x > 2$$

$$\therefore \text{ the sol. } \{2 < x < 6\}$$

$$(2) |2x-5| > 1 \quad ?$$

$$\text{Sol: } 2x-5 > 1 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$$

$$-(2x-5) > 1 \xrightarrow{\times -1} 2x-5 < -1 \Rightarrow 2x < 4$$

$$x < 2$$

$$\therefore \text{ The sol. } \{3 < x < 2\}$$

$$(3) -6 < 2x+6 < 4 \quad ?$$

$$\text{Sol: } -6 < 2x+6 \Rightarrow -12 < 2x \Rightarrow x > -6$$

$$2x+6 < 4 \Rightarrow 2x < -2 \Rightarrow x < -1$$

$$\therefore \text{ The sol. } \{-6 < x < -1\}$$

$$(4) x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad ?$$

$$\text{Sol: } (x-2)(x-3) \leq 0$$

$$x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad \text{and} \quad x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad , \quad x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\therefore \text{ The sol. } \{2 \leq x \leq 3\}$$

الامثلة المماثلة لا تأخذ



$$\frac{d}{dx}(f(x) \mp g(x)) = f'(x) \mp g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ex: 1- ①  $f(x) = \sqrt{3x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{3x-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (3x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{3}{(2x-1)} = 3 \cdot (2x-1)^{-1}$$

$$f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (2x-1)^{-2} \cdot 2 = \frac{-6}{(2x-1)^2}$$

$$\textcircled{3} f(x) = (3x-1)(2x+1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = (3x-1) \cdot 2 + (2x+1) \cdot 3 = 2(3x-1) + 3(2x+1) \\ = 6x-2+6x+3 = 12x+1$$

$$\textcircled{4} f(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{x+2}{x+1}\right) \cdot \frac{(x+1) \cdot 1 - (x+2) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ = 2 \left(\frac{x+2}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = 2 \left(\frac{x+2}{x+1}\right) \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} \\ = \frac{-2(x+2)}{(x+1)^3}$$

(4)

\* الدوال اللوغاريتمية

$$x=y \rightarrow \log_a y = x$$

$$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

$$3^2 = 9 \rightarrow \log_3 9 = 2$$

$$\log_e x = \ln x \rightarrow e = 2.718$$

$$\ln 1 = 0, \ln e = 1 \quad \{\ln e = \log_e e = 1\}$$

$$\ln u \cdot v = \ln u + \ln v$$

$$\ln u/v = \ln u - \ln v$$

$$\ln u^n = n \cdot \ln u$$

$$\frac{dy}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} (a^x) = a^x \ln a \frac{dy}{dx}$$

Ex: Find the value of "x" for the function

$$\log_2 (x^2 - 1) = 3 \quad ?$$

Sol:  $\log_2 (x^2 - 1) = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2^3 = 8$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Ex: Find  $\frac{dy}{dx}$  for the function  $y = \ln(x^2+1)$ ?

Sol:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

Ex:  $y = 5^x$  ?

Sol:  $\frac{dy}{dx} = 5^x \cdot \ln 5 = 2x$

Ex:  $y = \sqrt{(x+2)(x-2)}$  ?

Sol:  $\ln y = \frac{1}{3} \ln \frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+1)(x-3)}$

$\ln y = \frac{1}{3} [\ln(x+2) + \ln(x-2) - \ln(x^2+1) - \ln(x-3)]$

$\ln y = \frac{1}{3} [\ln(x+2) + \ln(x-2) - \ln(x^2+1) - \ln(x-3)]$

$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x-3} \right]$

Ex:  $y = \sin(x+y)$  ?

$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \cos(x+y) + \cos(x+y) \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} - \cos(x+y) \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$

$\frac{dy}{dx} (1 - \cos(x+y)) = \cos(x+y)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}$

Ex: Show that  $x^2 + y^2 = 1$  is the solution of

$y' = -\frac{x}{y}$  ?

Sol:  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x + 2y y' = 0 \Rightarrow 2y y' = -2x$

$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

$y' = \frac{d}{dx}(-1) - (-x) y' = -y + x y' = -y - \frac{x^2}{y}$

$y' = -\frac{(y + \frac{x^2}{y})}{y^2} = -\frac{(\frac{y^2 + x^2}{y})}{y^2} = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y^2}$

\* The Derivative (General) Definition

\*  $\frac{dy}{dx} K = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} x^n = n x^{n-1}$  {K constant}

\*  $\frac{dy}{dx} K \cdot f(x) = K \cdot f'(x)$

\*  $\frac{dy}{dx} \sin x = \cos x$  &  $\frac{dy}{dx} \cos x = -\sin x$

\*  $\frac{dy}{dx} \tan x = \sec^2 x$  &  $\frac{dy}{dx} \cot x = -\csc^2 x$

\*  $\frac{dy}{dx} \sec x = \sec x \cdot \tan x$

\*  $\frac{dy}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

\*  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

\*  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

# \* Integration التكاملي

5

$$* \int dx = x + c$$

$$* \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$* \int k f(x) = k \int f(x) \quad k : \text{constant}$$

$$* \int f(x) \pm g(x) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$* \int \underbrace{f(x)}_{\text{تحت التكامل}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{فإن كانت}} dx = \int f(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{فإن كانت } f(x) \text{ قابلة للتكامل} \\ \text{أو } g(x) \text{ قابلة للتكامل} \end{array} \right.$$

$$\text{Ex: } \int (2x+1)(x^2+x-7)^3 dx \quad ?$$

$$\int (x^2+x-7)^3 dx \Rightarrow \frac{(x^2+x-7)^3}{3} + c$$

$$* \int e^x dx = e^x + c$$

$$* \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$* \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$* \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$* \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$



$$* \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$* \int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$* \int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + C$$

Ex 1-  $\int e^{\underline{x^3}} \cdot \underline{3x^2} \, dx$  ?

$$\int e^{\underline{x^3}} \cdot \underline{3x^2} \, dx = \int e^{\underline{x^3}} \, dx = e^{\underline{x^3}} + C$$

Ex 1-  $\int \underline{2x} \cdot \underline{5^{x^2}} \, dx = \frac{5^{x^2}}{\ln 5} + C$

Ex 1-  $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx \quad * (-1)$

$$\int \cos^3 x \cdot \underline{-\sin x} \, dx \Rightarrow \int \cos^3 x \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

Ex)  $\int x \cdot \underline{7^{x^2}} \, dx \quad * \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \underline{2x} \cdot \underline{7^{x^2}} \, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} 7^{x^2} \frac{1}{\ln 7} + C \Rightarrow \frac{7^{x^2}}{2 \ln 7} + C$$

Ex)  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx \Rightarrow \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \Rightarrow$

$$\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + C$$

# \* The Matrices المصفوفات

المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأرقام مرتبة على شكل صفوف وأعمدة فكل واحد بين قوسين [ ] ويرمز إلى المصفوفة بأحد أحرف الكبيرة  $A, B, C$  ...

درجة المصفوفة هي عبارة عن عدد الصفوف مضروب في عدد الأعمدة  $(m \times n)$   $m$  صفوف و  $n$  أعمدة.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

الصف الأول  
العمود الثاني

## أنواع المصفوفات

① المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها صفرًا.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

② المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف  $m$  مساويًا لعدد الأعمدة  $n$   $m = n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

③ المصفوفة القطرية هي المصفوفة المربعة التي يكون جميع عناصرها تحت وفوق القطر الرئيسي تساوي صفرًا

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

## ٤) المصفوفة الذاتية $I_n$

وهي المصفوفة المربعة

والتي يكون فيها جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي «واحد»  
وأن جميع العناصر التي تحت وفوق القطر الرئيسي تساوي  
صفرًا. وأن  $n$  هي درجة المصفوفة.

تحتفظ

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ٥) المصفوفة المثلثية

فيها جميع عناصر فوق القطر الرئيسي  
أو تحت القطر الرئيسي تساوي صفرًا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

## ٦) المصفوفة المربعة أو المربعة $A$ تكون مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ثابته

عند تحويل مصفوفة إلى أعمدة ينتج مصفوفة أخرى من الدرجة  $n \times m$  ويرمز لها « $A^T$ ».

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

## ٧) المصفوفة المتناظرة أو المتماثلة

يقال أن المصفوفة

المربعة  $A$  بأنها متناظرة إذا كانت  $A = A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\therefore A = A^T$$

\* جمع المصفوفات - يمكن جمع مصفوفتين إذا كانتا من نفس الدرجة فقط لا غير.

Ex 1-  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

Ex 1-  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  Find  $C = A + I_2$ ?

Sol 1-  $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

\* طرح المصفوفات - يمكن طرح مصفوفتين إذا كانتا من نفس الدرجة فقط لا غير.

Ex 1- If  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  Find  $B = A - I_3$ ?

Sol 1-  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

\* ضرب المصفوفات بعدد ثابت -

Ex 1- If  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  find  $5 \times A$ ?

Sol 1-  $5A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 \\ 15 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Ex 1. If  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

Find the matrix  $C$  which satisfies

$$2A + C = B ?$$

Sol 1.

$$\underline{\underline{C = B - 2A}} \quad , \quad 2A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

قاعدة ضرب المصفوفات : يمكن ضرب مصفوفتين

إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية فقط لا غير .

Ex 1. If  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  Find  $A \times B$ ?

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C_{11} = 3 \times 4 + 0 \times 6 = 12$$

$$C_{12} = 3 \times 7 + 0 \times 8 = 21$$

$$C_{21} = 1 \times 4 + 1 \times 6 = 10$$

$$C_{22} = 1 \times 7 + 1 \times 8 = 15$$

$$C_{31} = 5 \times 4 + 2 \times 6 = 32$$

$$C_{32} = 5 \times 7 + 2 \times 8 = 51$$

Ex 1 If  $A = [3 \ 4 \ 1 \ 5]_{1 \times 4}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$  find  
①  $A \cdot B$  , ②  $B \cdot A$  ?

Soln ①  $A \cdot B = [3 \ 4 \ 1 \ 5] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = C$

$$C = A \cdot B = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 0 + 5 \times 1 = 16$$

$$\therefore C = [16]$$

②  $C = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [3 \ 4 \ 1 \ 5]$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Ex 1 Find  $A^2$  if  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  ?

Soln  $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

H.W:- If  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  find  $3A^2 - 3I_2$  ?