جامعة كربلاء
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

اسم التدريسي: م . عادل صاحب حسن الجراح
المادة : جبر خطي

محاضرات للمرحلة الاولى صباحي - مسائي) للعام الدراسي2015 -2014)

ايجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريق جاوس جوردون للحزف عن طريق استخدام العمليات الصفية الاولية

المصفوفة الموسعة $\left[A \;\;|\;\; I\right] \longrightarrow \left[I \;\;|\;\; A^{-1}\right]$

Ex 1: أوجد معكوس المصفوفه التالية باستخدام طريق جاوس جوردون للحزف

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\underset{A \qquad\qquad I}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]} \xrightarrow{A_{1,2}^{(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{A_{2,1}^{(-4)}} \underset{I \qquad\qquad A^{-1}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex 2: أوجد معكوس المصفوفه التالية باستخدام طريق جاوس جوردون للحزف

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left[A \;\vdots\; I\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{A_{1,3}^{(6)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{2,3}^{(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{M_{3}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{3,2}^{(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{A_{2,1}^{(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$=[I \vdots A^{-1}]$$

لذلك المصفوفة A قابلة للعكس والمعكوس هو A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

- تأكد من ذلك بنفسك:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Ex 3: بين أن المصفوفة التالية ليس لها معكوس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}^{(-3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{1,3}^{(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{2,3}^{(1)}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نجد ان كل عنصر في الصف الأخير في المصفوفة A صفر ولذلك لا يمكن كاتبة $[A \quad | \quad I]$ على شكل $[I \quad | \quad A^{-1}]$ وايضا يمكن استنتاج ان $|A| = 0$

لذلك فأن المصفوفة A ليس لها معكوس .

بالنسبة للمصفوفة ٢*٢ يمكن حساب المعكوس طبقا للمثال التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

نجد ان

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

حيث ان $ad - bc \neq 0$

خواص على معكوس المصفوفة.

اذا كان A مصفوفة قابلة للعكس و k عدد صحيح موجب و c عدد حقيقي

$$(1)\ (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2)\ (A^{k})^{-1} = A^{-k} = (A^{-1})^{k}$$

$$(3)\ (cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

$$(4)\ (A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$(A^{T})^{-1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.4 \\ 0.3 & -0.2 \end{bmatrix} = (A^{-1})^{T}$$

للمصفوفة التالية أوجد A^{-2} بطريقتين مختلفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الطريقة الأولى:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \quad = A^{-2}$$

الطريقة الثانية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. = A^{-2}$$

- نظرية معكوس حاصل الضرب

إذا كانت المصفوفات A و B قابلة للعكس فأن حاصل الضرب AB ايضا قابلة للعكس و العلاقة الأتية صحيحة

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- الأثبات.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

لذلك المصفوفة AB قابلة للعكس ومعكوسها هو $B^{-1}A^{-1}$

- Note:

$$(A_1A_2A_3\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$$

$$(A_1A_2A_3\cdots A_n)^{T} = A_n^{T}\cdots A_3^{T}A_2^{T}A_1^{T}$$

جامعة كربلاء
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

اسم التدريسي: م . عادل صاحب حسن الجراح
المادة : جبر خطي

محاضرات للمرحلة الاولى صباحي - مسائي) للعام الدراسي2015 -2014)

- نظرية قانون الحذف
- إذا كانت المصفوفة C قابلة للعكس فأن

(1) If $AC=BC$, then $A=B$

(2) If $CA=CB$, then $A=B$

الأثبات:

$$AC = BC$$
$$(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$$
$$A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$$
$$AI = BI$$
$$A = B$$

نظرية وحدانية الحل لنظام المعادلات الخطية

اذا كانت المصفوفة A قابلة للعكس فأن نظام المعادلات الخطية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ له حل وحيد وهو $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

الأثبات

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$
$$I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

نفرض أن $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ حلول للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

لــذلك $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ من قانون الحذف

لذلك فأن الحل وحيد

- Ex 3:

استخدم معكوس المصفوفة لحل الأنظمة التالية

(a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 4y + z &= -2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ 3x + 3y + z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

الحل

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan Elimination}} A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(a)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل الصفرى للنظام المتجانس نحصل عليه فقط لو المصفوفة لها معكوس أو محدد المصفوفة لا يساوى صفر

الحل الصفرى للنظام المتجانس $A\mathbf{x} = 0$ نحصل عليه فقط لو المصفوفة A
لها معكوس أو محدد المصفوفة $|A|$ لا يساوى صفر

أما إذا كانت المصفوفة A ليس لها معكوس (شاذه) اى ان محددها يساوى صفر
فأن للنظام المتجانس له عدد لا نهائى من الحلول بالإضافة للحل الصفرى

لذلك فأن النظام المتجانس دائما نظام متآلف (اى له حل واحد على الأقل)

يتبع بالمحاضرة لاحقة